Zum Begriff der makroskopischen Observablen in der klassischen Mechanik und eine Verallgemeinerung der BOLTZMANN - Gleichung

INAUGURAL - DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde

der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Joachim SCHRÖTER
aus Dresden

1962

Druck:

Ernst - Reuter - Gesellschaft
der Förderer und Freunde der Freien Universität e.V.

Dissertations - Druckstelle

Berlin-Dahlem, Garystr. 45, Tel.: 76 52 61, App. 668

Zum Begriff der makroskopischen Observablen in der klassischen Mechanik und eine Verallgemeinerung der BOLTZMANN - Gleichung

INAUGURAL - DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde

R. UNIV. BIBLIOTHEK

der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

vorgelegt von
Joachim SCHRÖTER
aus Dresden

Gutachter:

Prof. Dr. G. Ludwig

Prof. Dr. W. Wild

Tag der mündlichen Prüfung:

5. III. 1962

Tag der Promotion:

25. Juli 1962

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Inhaltsverzeichnis

			Seite
Kap. I		Einleitung	
Kap. II		Die BOLTZMANNschen Dichtefunktionen f_n	7
	1.	Vorbemerkungen	7
	2.	Definition der f'_n	8
	3.	Die BOLTZMANNschen Dichtefunktionen	12
	4.	Spezielle Wahl der $\Delta'_n(X)$	18
	5.	Eigenschaften der f_n im Γ - Raum	32
	6.	Eigenschaften der f_n im μ_n - Raum	45
	7.	Die f_n für allgemeine mechanische Systeme	49
Kap. III		Makroskopische Observablen und Gesamtheiten	55
	1.	Definition der makroskopischen Observablen und Gesamtheiten	55
	2.	Reduzierung der F_N	65
Kap. IV		Das zeitliche Verhalten makroskopischer Systeme	70
	1.	Makroskopisch MARKOFFsche und makroskopisch determinierte Strömungen in Γ	70
	2.	Determinierte Gleichungen (BOLTZMANN - Gleichung)	76
	3.	MARKOFFsche Gleichungen	77
		Literaturverzeichnis	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548014_0063

Kap. I Einleitung

In allen theoretischen Untersuchungen über eine Begründung der phänomenologischen Theorien aus der Mechanik bzw. Quantenmechanik auf Grund der atomaren Struktur der Materie taucht in mehr oder minder versteckter Form der Begriff der makroskopischen Observablen auf. In Analogie zu Arbeiten von G. LUDWIG [1] über den quantenmechanischen Fall soll hier versucht werden, eine möglichst allgemeine Definition dieses Begriffes innerhalb der klassischen Mechanik zu geben und Aussagen über das zeitliche Verhalten der makroskopischen Observablen zu gewinnen. Dabei werden keine speziellen Systeme betrachtet, sondern das Ziel dieser Arbeit ist nur, die allgemeine Theorie, d. h. den Rahmen für mögliche Anwendungen auf spezielle Systeme zu entwickeln.

Daß als Ausgangspunkt für das Erreichen dieses Zieles die klassische Mechanik verwendet werden soll, ist natürlich vom Standpunkt der Quantenmechanik aus gesehen nicht unproblematisch, da die ein makroskopisches System konstituierenden "Teilchen" gerade nicht der klassischen Mechanik gehorchen. Für ein solches Unternehmen spricht allerdings die Erfahrung, daß die Gaskinetik, in der ja das oben aufgestellte Problem schon lange durchgeführt ist, so ausgezeichnet mit den Experimenten übereinstimmende Resultate liefert. Als der tiefere Grund dafür ist wohl das Korrespondenzprinzip anzusehen, das ja gerade aussagt, daß die (im Prinzipiellen zwar falsche) klassische Mechanik "manchmal" richtige numerische Ergebnisse liefert. Es ist daher nicht sinnlos anzunehmen, daß die makroskopischen Observablen gerade zum "richtigen" Teil der klassischen Mechanik gehören, wenn diese auf aus vielen atomaren Teilchen bestehende Systeme angewandt wird. Alle Untersuchungen dieser Art können natürlich nicht mehr als Modellcharakter haben, und in Kap. II §3 und 7 wird noch genauer diskutiert werden, welche klassischen Systeme sich überhaupt als Modelle für makroskopische Systeme eignen. Um aber zu einer Definition des Begriffs der makroskopischen Observablen zu kommen, reicht die klassische Mechanik

(auch die Quantenmechanik) allein nicht aus, sondern es müssen noch zusätzliche Erfahrungstatsachen mit in die Theorie eingebaut werden, die dann in Form von Zusatzaxiomen auftreten.

Als geeignete Formulierung der Mechanik selbst erweist sich, wenn man sich auf Systeme mit konstanter Teilchenzahl beschränkt, die in Analogie zur Quantenmechanik konstruierte statistische Beschreibung, wie sie z. B. in [2] gegeben wurde. Dieser Formalismus ist nicht nur bei Problemen wie den hier betrachteten anwendbar, sondern viel allgemeiner. Jedoch hat die Verwendung allgemeiner Maße natürlich keinerlei tieferen physikalischen Sinn, sondern dient nur der Einfachheit der Formulierung. Der Begriff Wahrscheinlichkeit wird in der Literatur nicht einheitlich gebraucht. Er soll im folgenden immer so verstanden werden: Gegeben sei eine Gesamtheit von sehr vielen und unabhängigen Systemen. Durch die relative Häufigkeit eines Ereignisses in der Gesamtheit wird dann die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses gemessen. Daß in der Meßvorschrift für die Wahrscheinlichkeit der unbestimmte Begriff "sehr viele" vorkommt, ist nicht gravierender als z. B. die Unbestimmtheit in der Wahl der Zeitdifferenz bei der Messung von Geschwindigkeiten. Genausowenig wie man zwischen "experimentellen" und "theoretischen" Geschwindigkeiten unterscheidet, hat es Sinn, zwischen der relativen Häufigkeit und der Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden. Zu beachten ist nur, daß, wie auch sonst bei Experimenten, Beziehungen zwischen Wahrscheinlichkeiten experimentell nur mit einer bestimmten Genauigkeit erfüllt werden können. Nach dieser Auffassung kommt also der Begriff Wahrscheinlichkeit nur Gesamtheiten zu, niemals einem Einzelsystem. Umgekehrt kommt aber auch nicht jeder Menge von Systemen der Charakter einer Gesamtheit im Sinne der Wahrscheinlichkeitstheorie zu, z. B. dann nicht, wenn die Systeme in starker Wechselwirkung stehen: es ist sinnlos, von der Dichte einer Flüssigkeit als von einer Wahrscheinlichkeitsdichte (mal Masse) zu reden.

Für die Behandlung von reagierenden Systemen, wie z. B. Plasmen mit Dissoziation und Rekombination, ist die Mechanik in der bisher betrachteten Form zunächst noch ungeeignet. Jedoch läßt sich der Formalismus leicht verallgemeinern, was hier nur kurz skizziert werden möge, da nur in Kap. II §7 davon Gebrauch gemacht werden wird. Der Ausgangspunkt ist hier wie bei der gewöhnlichen Mechanik die Annahme, daß der momentane Zustand eines Systems durch Angabe von Orts- und Impulskoordinaten $(q_1, p_1, \ldots, q_K, p_K)$ und weiteren Angaben über den Reaktionszustand bestimmt ist. Durch eine Reaktion verändert sich nun nicht nur das 2 K - tupel $x = (q_1, p_1, \ldots, q_K, p_K)$, sondern das System selbst geht in ein anderes über, oder anders ausgedrückt, dasselbe System erscheint in einer anderen Form. Kann das System in M verschiedenen Formen auftreten, so soll, wie oben beschrieben, der Zustand jeder einzelnen Form durch die x bestimmt sein. Jeder Zustand kann also durch einen Satz von Zahlen $(x;\varrho)$ eindeutig beschrieben werden, wobei zu beachten ist, daß der Wertebereich der x für jedes ϱ evtl. ein anderer ist. Der Γ - Raum des reagierenden Systems ist demnach: $\Gamma = \bigcup_{\varrho=1}^{M} \Gamma_\varrho$. Die Observablen sind dann sinngemäß die Funktionen $A(x;\varrho)$, welche für jedes feste ϱ bzl. der x BAIRESCH sind. Gesamtheiten von Systemen werden durch Maße bzw. Dichtefunktionen in Γ beschrieben. Es ist nun keineswegs anzunehmen, daß reagierende Systeme in allen Fällen ein determiniertes Verhalten zeigen werden. Es wird daher im SCHRÖDINGER - Bild für die Dichtefunktionen nur verlangt, daß

$$F(x,\varrho,t) = \sum_{\varrho'} \int dx'\, P(x,\varrho,t \mid x',\varrho',t')\, F(x',\varrho',t') \qquad \text{(I, 1)}$$

gilt, wobei

$$P = p(x,\varrho,t,t')\, \delta(x - \alpha(x',\varrho',t',t)) + \\ + w(x,\varrho,t \mid x',\varrho',t') \qquad \text{(I, 2)}$$

und $\alpha(x', \varrho', t', t)$ eine Lösung der HAMILTONSCHEN Bewegungsgleichungen in $\Gamma_{\varrho'}$ ist, die alle nicht zu Reaktionen

führenden Kräfte berücksichtigen sollen. Ferner soll noch $w = 0$ sein für $\rho = \rho'$ und alle Reaktionsinvarianten als δ-Funktionen enthalten. Die zeitliche Entwicklung ist somit ein allgemeiner MARKOFFSCHER Prozeß. Im Falle $p = 1$ und $w = 0$ geht der Formalismus in den der gewöhnlichen Mechanik über. Von allen später betrachteten Systemen wird vorausgesetzt, daß sie sich in dem dargestellten allgemeinen oder dem speziellen HAMILTON - Formalismus beschreiben lassen.

In den nun folgenden Überlegungen wird es sich erweisen, daß gewisse Größen, die streng genommen verschieden sind, im Sinne einer irgendwie bestimmten Meßgenauigkeit nicht voneinander unterschieden werden können, also als gleich betrachtet werden müssen. Diese Verschiedenheit wird von dem Begriff "fast überall gleich" nicht erfaßt. Andererseits ist die Ausdrucksweise "ungefähr gleich" oder sogar nur "gleich" in einigen Fällen zu ungenau. Daher soll für die betreffenden Fälle folgendes vereinbart werden: Ist zu einer Observablen A zugleich irgendwie für jeden Wert eine Meßungenauigkeit gegeben, so soll für eine zweite Observable B, die von A durch Messen nicht unterschieden werden kann, geschrieben werden:

$$A = B + \lambda(A) \qquad (I, 3)$$

Die Funktion $\lambda(A)$ übersteigt dabei nicht die Meßungenauigkeit, und diese selbst kann nach der Erfahrung oder theoretisch bestimmt sein. Es entsteht dabei natürlich die Frage, was unter Meßungenauigkeit zu verstehen ist und wie sie bestimmt sein kann. Ein Meßapparat für eine Größe, der nicht absolut genaue Werte messen kann, gestattet drei Aussagen:

1. Der Wert α der zu messenden Größe liegt mit Sicherheit nicht in der Menge $K'' = \{\gamma \mid -\infty < \gamma \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \gamma < \infty\}$.
2. Die Zahlen der Menge $K = \{\gamma \mid \beta_1 \leq \gamma \leq \beta_2\}$ kommen mit Sicherheit als mögliche Werte von α in Frage.
3. Es ist nicht entscheidbar, welche Teilmenge Λ' der Menge $K' = \{\gamma \mid \alpha_1 < \gamma < \beta_1,\ \alpha_2 > \gamma > \beta_2\}$ noch aus möglichen Werten von α besteht, so daß $K' \supset \Lambda'$ aus un-

möglichen Werten besteht. Es ist damit also angedeutet, daß zwischen möglichen und unmöglichen Werten von α keine scharfe Grenze angebbar ist. Unter Meßungenauigkeit ist dann eine "möglichst" große Zahl $\beta_2 - \beta_1$ zu verstehen, für die die drei experimentellen Aussagen noch richtig sind. Ein Meßapparat, der nicht genau mißt und der zur Messung einer bestimmten Größe vorgesehen ist, ist also auch ein ungenauer Meßapparat für alle (gleichzeitig meßbaren) Größen, von denen irgendwie bekannt ist, daß sie sich von der ursprünglichen nur wenig, d. h. innerhalb der Meßungenauigkeit unterscheiden.
Hat man speziell eine Observable A(x) bzw. A(x, φ) als zu messende Größe, so gilt Folgendes: Ist der Zustand x bzw. (x, φ) absolut genau bekannt, so wäre prinzipiell der Wert von A auch absolut genau bekannt. Denn nimmt man die Mechanik als gültig an, so kommt der Observablen A immer ein bestimmter Wert zu. Eine Meßapparatur, die A ungenau messen soll, ist also eine solche, die zugleich mit A auch andere Funktionen B, die von A entsprechend wenig abweichen, messen. Man erhält also drei Mengen $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ in $\Gamma \times R$, die hier Streifen genannt werden, so daß in $\varkappa$ nur mögliche, in $\varkappa'$ nicht entscheidbare und in $\varkappa''$ die unmöglichen Funktionen A liegen. Zwischen <u>experimentell</u> bestimmten Observablen A und B besteht also nicht immer eine der Relationen "A experimentell verschieden B" oder "A experimentell gleich B". Die erste Relation besteht, wenn $\varkappa''(A) \supset \varkappa(B)$ oder $\varkappa''(B) \supset \varkappa(A)$, die zweite z. B., wenn $\varkappa(A) = \varkappa(B)$ ist. Für A experimentell gleich B wird, wie oben eingeführt, $A = B + \lambda(A)$ geschrieben.

Hat man eine ungenaue Messung mit dem (selbst mit einer Unsicherheit behafteten) Resultat $[\beta_1, \beta_2]$ gemacht, so entsteht die Frage, welche Rückschlüsse man daraus auf den Zustand des Systems ziehen kann. Würde dem ungenauen Meßapparat genau ein Streifen $\varkappa$ zukommen und wäre das Resultat der Messung $[\beta_1, \beta_2]$ exakt richtig, so wäre möglicherweise der Zustand x des Systems auch genau festgelegt, wie anschaulich sofort einzusehen ist. Daß man von einer ungenauen Messung nicht exakt auf den Zustand x des Systems zurückschließen kann, liegt also nicht so sehr an

der Tatsache, daß die Messung ungenau ist, sondern, daß ihr eine Unsicherheit, die durch $\varkappa'$ gegeben ist, anhaftet. Anschaulich macht man sich klar, daß das unsichere Meßergebnis $[\beta_1, \beta_2]$ eine Reihe von Realisierungsmöglichkeiten x hat. Aus dem Resultat kann man also nur auf eine Menge $\Omega(\beta_1, \beta_2)$ von Zuständen x zurückschließen. Anschaulich ist ferner einsichtig, daß man Ω erhalten kann als $\Omega = \{x \mid \beta_1 \leq A(x) \leq \beta_2\}$ mit geeignetem $A(x) \in \varkappa$.

Kap. II Die BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen f_n

1. Vorbemerkungen

Der Beschreibung von Gesamtheiten klassisch mechanischer Systeme durch Maßfunktionen bzw. durch Wahrscheinlichkeitsdichten gegenüber steht eine andere Beschreibungsweise, die meist von der ersten nicht unterschieden wird, nämlich die Beschreibung von einzelnen Vielteilchensystemen durch BOLTZMANNSCHE Dichtefunktionen. Das Vorhandensein eines prinzipiellen Unterschiedes zwischen beiden Betrachtungsweisen zeigt sich am einfachsten und klarsten in der Tatsache, daß die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung von physikalischen Systemen, d. h. die Betrachtung von Gesamtheiten für alle mechanischen Systeme möglich ist, während, wie im folgenden gezeigt wird, die BOLTZMANNSCHE Beschreibungsweise nur für Vielteilchensysteme sinnvoll ist. Das schließt natürlich nicht aus, daß nicht "zufällig" eine Wahrscheinlichkeitsdichte gleich einer BOLTZMANNSCHEN Dichte werden kann. Es besteht sogar zwischen beiden Arten von Dichtefunktionen ein genereller Zusammenhang, aus dem aber auch wieder in eindeutiger Weise die Verschiedenartigkeit der Betrachtungsweisen hervorgeht. Es entsteht jetzt natürlich die Frage, was für eine physikalische Bedeutung die einzelnen Methoden haben. In der GIBBSSCHEN Statistik werden Gesamtheiten betrachtet, und die physikalische Bedeutung der Methode liegt auf der Hand. Ferner ist diese Art der Beschreibung überall dort am Platze, wo der Zustand eines Systems nicht genau bekannt ist, sondern wo man nur weiß, daß dieses eine System zu einer bestimmten Gesamtheit gehört. In manchen Fällen ist es dann möglich, sinnvolle Rückschlüsse auf das Einzelsystem zu ziehen. Die BOLTZMANNSCHE Beschreibungsweise ist nur anwendbar auf "große" Systeme, d. h. solche, die aus vielen Teilchen bestehen, und hängt zusammen mit der Beschreibung durch "makroskopische" Observablen. Durch die BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen wird es nämlich möglich, die Menge der makroskopischen Observablen in der Menge aller Observablen zu definieren. Die BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen sind Observable und hängen mit der Massendichte

zusammen. Gerade durch die makroskopische Beschreibungsweise eines einzelnen Systems wird aber auch die statistische Methode unbedingt notwendig, da der Zustand eines Systems makroskopisch nicht genau festgelegt werden kann. Beide Methoden sind also logisch etwas ganz Verschiedenes. Sie schließen sich weder aus, noch sind immer beide zugleich anwendbar. (Vgl. die Diskussion bei GRAD [3], S. 218) Spezielle Fälle der im folgenden definierten Funktionen wurden bereits in der Literatur behandelt. (Vgl. z. B. [4], [5])

2. Definition der f_n'

Gegeben sei der Γ - Raum eines Systems von Massenpunkten, das durch die kanonisch konjugierten Variablen p_r^j, q_r^j ($j = 1, 2, 3$; $r = 1, \ldots, N$) vollständig beschrieben werde. Das System soll also nicht aus komplizierteren mechanischen Gebilden, wie z. B. starren Kugeln, zusammengesetzt sein und keine Reaktionen aufweisen. Diese Voraussetzung gilt für alle folgenden Paragraphen bis §6. Zur Abkürzung schreibt man
$p_r = (p_r^1, p_r^2, p_r^3)$, $q_r = (q_r^1, q_r^2, q_r^3)$, $x_r = (p_r, q_r)$ und $(x_1, \ldots, x_N) = x$.
Es wird weiter vorausgesetzt, daß q_r die Orts- und p_r die Impulskoordinaten des Teilchens r sind und daß sie alle auf dasselbe Koordinatensystem bezogen sind.

Als den zu Γ gehörigen μ_n - Raum (mit $n \leq N$) bezeichnet man den Raum aller 6n - tupel $(X_1, \ldots, X_n)$, wobei zur Abkürzung $X_r = (P_r, Q_r)$, $P_r = (P_r^1, P_r^2, P_r^3)$ usw. gesetzt ist und die X_r denselben Wertbereich wie die x_r haben sollen. In diesem Sinne wird also nur einem Γ - Raum mit der eingeführten speziellen Wahl des Koordinatensystems ein μ_n - Raum zugeordnet. Dann ist μ_n isomorph einem Teilraum von Γ. Falls die Anzahl n feststeht, wird auch die Abkürzung $(X_1, \ldots, X_n) = X$ benutzt.

Bildet man von einem Punkt x in Γ alle Variationen der x_r ohne Wiederholung zur n - ten Klasse, so ergibt jede Variation einen Punkt im μ_n - Raum und der eine Punkt x im

Γ - Raum eine Punktfolge $\sum_n(x)$ von $L_n = N(N-1)\ldots(N-n+1)$ Punkten $\overline{x}^{\rho}(x) = (x_{\nu_{\rho 1}}, \cdots, x_{\nu_{\rho n}})$ mit $\rho = 1, \ldots, L_n$. Die Folge $\sum_n(x)$ soll als Punktschwarm bezeichnet werden. Falls x derartig ist, daß für $r \neq k$ auch immer $x_r \neq x_k$ ist, so sind keine zwei Punkte von $\sum_n$ gleich. Es gilt jetzt der Satz: Wenn ein Punkt x nicht gleich einem Punkt ist, der durch Permutation der x'_ν aus x' entsteht, d. h. wenn $x \neq \text{Perm}(x')$ ist, so ist auch $\sum_n(x)$ nicht gleich einer Permutation von $\sum_n(x')$. Denn angenommen es sei

$$\sum_n(x) = \text{Perm} \sum_n(x') \quad , \tag{II, 1}$$

so folgt

$$(x_{\nu_{\rho 1}}, \cdots, x_{\nu_{\rho n}}) = (x'_{\mu_{\lambda 1}}, \cdots, x'_{\mu_{\lambda n}}) \tag{II, 2}$$

und daraus speziell $x_\nu = x'_{\mu_\nu}$. Da aber noch für $x_\nu = x_\rho$ die Indizes μ_ν und μ_ρ gleich sein können, geht man von der umgekehrten Beziehung

$$(x'_{\mu_{\rho 1}}, \cdots, x'_{\mu_{\rho n}}) = (x_{\nu_{\lambda 1}}, \cdots, x_{\nu_{\lambda n}}) \tag{II, 3}$$

aus und erhält: $x'_\mu = x_{\nu_\mu}$. Man erhält also eine Beziehung zwischen allen x_ν und x_μ, und es folgt, daß $x = \text{Perm}(x')$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen. Die Umkehrung des Satzes gilt ebenso, wie unmittelbar einzusehen.

An dem hier erörterten Fall eines Systems aus Massenpunkten, das durch die Vektoren $x_1, \ldots, x_N$ vollständig beschrieben wird, ist auch die hinter den Begriffen μ_n - Raum und Punktschwarm stehende Idee zu erkennen. Nämlich, die Teilchen eines Systems werden im Hinblick auf ihnen zukommende gleichartige Bestimmungsstücke, im vorliegenden Fall die x_r, betrachtet. Es sollen also nicht z. B. Winkel- und Kartesische Koordinaten verglichen werden. Es ist daher klar, daß bei komplizierteren Systemen noch andere μ - Räume und andere Punktschwärme von Interesse sein können. Diese werden in §7 untersucht.

Es werde jetzt jedem Punkt des μ_n - Raumes eine Menge positiven BORELmaßes $\Delta_n'(X) = \Delta_n'(X_1, \ldots, X_n)$ zugeordnet, wobei $X \in \Delta_n'(X)$ sein soll. $V(\Delta_n'(X))$ sei das Maß von $\Delta_n'(X)$. Damit definiert man die Funktion $f_n'(X \mid x) = f_n'(X_1, \ldots, X_n \mid x_1, \ldots, x_N)$, und zwar soll sein:

$$f_n'(\bar{X} \mid x) = \frac{1}{V(\Delta_n'(\bar{X}))} \text{ Anzahl der Punkte von } \Sigma_n(x) \text{ in } \Delta_n'(\bar{X}). \qquad \text{(II, 4)}$$

Diese Funktionen hängen natürlich noch stark von der Wahl der $\Delta_n'(X)$ ab, und erst nach einer weiteren Festlegung dieser Mengen werden sich die f_n' als physikalisch brauchbar erweisen. Ein wichtiger Spezialfall sei noch besonders hervorgehoben: Durch die Zusatzforderung, daß mit $\hat{X} \in \Delta_n''(X)$ auch $\Delta_n''(X) = \Delta_n''(\hat{X})$, erhält man eine vollständige Einteilung des μ_n - Raumes in disjunkte Mengen, d. h. eine Netzeinteilung. Die damit wie oben definierte Funktion werde mit $f_n''(X \mid x)$ bezeichnet. Aus der allgemeinen Definition folgt noch sofort, daß sich f_n' in der Integralform

$$f_n'(\bar{X} \mid x) = \frac{1}{V(\Delta_n'(\bar{X}))} \int_{\Delta_n'(\bar{X})} \sum_{\rho=1}^{L_n} \delta(Y - \bar{X}^\rho(x)) \, d^n Y \qquad \text{(II, 5)}$$

schreiben läßt. Die so definierten Funktionen f_n', also auch die f_n'' sind Observablen, die noch von den Parametern X abhängen. Der Beweis ergibt sich so: Sei $X^\rho(x)$ ein Element von $\Sigma_n(x)$ und $\rho = 1, \ldots, L_n$. Dann ist, wenn C die charakteristische Funktion auf Δ_n' ist,

$$f_n'(\bar{X} \mid x) = \frac{1}{V(\Delta_n'(\bar{X}))} \sum_{\rho=1}^{L_n} \int_{\mu_n} C\{\Delta_n'(\bar{X})\}(Y) \, \delta(Y - \bar{X}^\rho(x)) \, d^n Y. \qquad \text{(II, 6)}$$

Daraus folgt

$$f_n'(\bar{X} \mid x) = \frac{1}{V(\Delta_n'(\bar{X}))} \sum_{\rho=1}^{L_n} C\{\Delta_n'(\bar{X})\}(\bar{X}^\rho(x)). \qquad \text{(II, 7)}$$

C ist bzgl. X^{ρ} meßbar. Es ist aber auch bzgl. x meßbar. Denn mit $C = \tilde{O}_{\rho}\{\Delta'_n(X)\}(x)$ ist $\tilde{C}_{\rho}$ eine charakteristische Funktion auf einer Zylindermenge $\tilde{\Lambda}_{\rho}$ in Γ mit der meßbaren Basis Δ'_n. D. h. aber, daß $f'_n(X \mid x)$ für jedes X bzgl. x meßbar ist und, da es beschränkt ist, auch integrierbar.

Über die Meßbarkeit bzgl. X kann man folgendes sagen: Es sei $D'_n(X, X') = C\{\Delta'_n(X)\}(X')$. Dann ist

$$D'_n(\bar{x}, \bar{X}') = \begin{cases} 1, & (\bar{x}, \bar{X}') \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(II, 8)}$$

wobei $M = \bigcup_{\gamma} \{\gamma\} \times \Delta'_n(\gamma)$ ist. Wenn M meßbar ist, folgt die Meßbarkeit von D'_n und ferner die Integrierbarkeit von $V(\Delta'_n(X))$, da $\Delta'_n(X)$ gleich dem Schnitt M_X von M mit der "Ebene" X ist. (Vgl. RICHTER [6], S. 191). Bildet man den Schnitt von M mit der anderen Koordinate X', so erhält man eine andere Menge $\hat{\Delta}'_n(X')$, und es gilt der Satz, daß aus $X' \in \Delta'_n(X)$ die Beziehung $X \in \hat{\Delta}'_n(X')$ folgt. Damit definiert man wie oben eine Funktion $\hat{D}'_n(X', X)$ durch $\hat{D}'_n(X', X) = C\{\Delta'_n(X')\}(X)$. Es ist dann $\hat{D}'_n(X', X) = D'_n(X, X')$, da

$$\hat{D}'_n(\bar{X}', \bar{x}) = \begin{cases} 1, & (\bar{x}, \bar{X}') \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{(II, 9)}$$

Damit hat man zwei weitere Darstellungen von f'_n, nämlich

$$f'_n(\bar{x} \mid x) = V^{-1}(\Delta'_n(\bar{x})) \sum_{\rho=1}^{L_n} D'_n(\bar{x}, \bar{X}^{\rho(x)}) \qquad \text{(II, 10)}$$

und

$$f'_n(\bar{x} \mid x) = V^{-1}(\Delta'_n(\bar{x})) \sum_{\rho=1}^{L_n} \hat{D}'_n(\bar{x}^{\rho(x)}, \bar{x}) . \qquad \text{(II, 11)}$$

Anschaulich ist klar, daß die f''_n Stufenfunktionen auf den Δ''_n sind. Aber man kann auch den für f'_n angegebenen formalen Weg beschreiten, um die Meßbarkeit bzgl. X einzuse-

hen. Da nämlich $V(\Delta''_n) > 0$ ist, gibt es nur abzählbar viele $\Delta''_n = \Delta''_n(X_{(k)})$, und für M erhält man: $M = \bigcup_k \Delta''_n(X_{(k)}) \times \Delta''_n(X_{(k)})$. M ist meßbar, und $\hat{\Delta}''_n = \Delta''_n$ und $\hat{D}''_n = D''_n$. Die Zahlen N und n unterliegen bisher keinen Einschränkungen.

3. Die BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen

Wie bereits oben betont, müssen die $\Delta'_n(X)$ noch spezieller gewählt werden, wenn sie sich als brauchbar für die Behandlung bestimmter Probleme erweisen sollen. Es werden daher einige Forderungen an die f'_n aufgestellt und hinterher $\Delta'_n(X)$ angegeben, von denen sich zeigen läßt, daß sie unter gewissen Umständen die gestellten Forderungen erfüllen. Diese Forderungen gliedern sich in zwei Gruppen zu je dreien (a, b, c und d, e, f) und sind so zugeschnitten, daß bei Erfülltsein der ersten drei die f'_n eine Aussage über das evtl. makroskopische Verhalten eines großen Systems machen, auf das ihr Bildungsprinzip angewandt wird, was aber erst in Kap. III ausführlich behandelt werden soll.

Die Forderungen d) und e) sichern ein bequemes Rechnen mit den Funktionen f'_n und f) ihre Unabhängigkeit. Ein mechanisches System, das aus N Massenpunkten besteht, soll groß genannt werden, wenn N sehr groß ist. Ein mechanisches System aus N gleichen Massenpunkten mit symmetrischer HAMILTON - Funktion soll hier makroskopisch genannt werden, wenn es im Γ - Raum des Systems einen Bereich Γ' gibt, für den die f'_n die Forderungen a) bis f) erfüllen. Ein nicht aus gleichen Massenpunkten (oder aus anderen Gebilden) zusammengesetztes System muß noch mehr Bedingungen erfüllen, wie in §7 ausführlich diskutiert wird. Die folgenden Postulate sind also gerade so gemacht, daß die Aussicht besteht, daß die mechanischen Modelle der nach der Erfahrung makroskopischen Systeme aus gleichen Teilchen die Bedingungen erfüllen. Daneben kann es natürlich noch Systeme geben, die alle Forderungen erfüllen, aber nicht als Modelle realer makroskopischer Systeme auftreten. Im fol-

genden wird noch der Begriff der makroskopischen Messung gebraucht, und zwar soll darunter eine Messung verstanden werden, zu deren Durchführung man einen Apparat benötigt, der nicht sehr viel größer als das untersuchte System ist. In diesem Sinne kann es also makroskopische Messungen nur an (realen) makroskopischen Systemen geben.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die folgenden Postulate nichts weiter als Verallgemeinerungen der in der Gaskinetik seit BOLTZMANN immer gemachten Voraussetzungen sind (Vgl. EHRENFEST [4]).

a) Die $f'_n(X \mid x)$ sollen eine Aussage machen über eine Umgebung des Punktes X im μ_n - Raum. Die $\Delta'_n(X)$ sollen also Umgebungen des Punktes X sein, die man sich alle der Einfachheit halber als von der gleichen Art denken kann, z. B. so, daß sie für jedes feste n durch Translation auseinander hervorgehen. Gegeben sei jetzt eine Menge von Umgebungen $\Delta'_n(X)$, die alle durch Translationen ineinander überführbar sein sollen und außerdem für bestimmte Mengen von Translationen jeweils Netze bilden sollen. Diese Netze sollen hier als Raster bezeichnet werden. Mit diesen $\Delta'_n(X)$ und allen daraus herstellbaren Rastern bildet man dann f'_n und f''_n. Diese erfüllen über dem μ_n - Raum für festes x nicht nur eine Fläche, sondern einen ganzen 6 n + 1 - dimensionalen Streifen $\sigma(x)$. Durch diesen Streifen sind, wie auf S. 4 eingeführt, Funktionen λ definiert, so daß man immer schreiben kann:

$$f_n^{(\alpha)} = \hat{f}_n'' + \lambda\left(f_n^{(\alpha)} \mid \Delta_n^{(\alpha)}\right) . \qquad \text{(II, 12)}$$

Für festes x kann man ferner das Zeitmittel für alle f''_n und f'_n bilden, und durch

$$\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f_n^{(\alpha)}\, dt = f_n^{(\alpha)} + \lambda'\left(f_n^{(\alpha)} \mid \Delta_n^{(\alpha)}\right) \qquad \text{(II, 13)}$$

sind dann Funktionen λ' definiert. Es soll nun gelten:

b) Es gibt ein Gebiet Γ' im Phasenraum, eine Zahl m und eine Menge von Δ'_n, so daß für $n \leq m$ die Abmessungen von

Δ_n' nicht größer als von der Größenordnung der Genauigkeiten sind, mit denen gleichzeitig makroskopisch Ort und Impuls gemessen werden können, und daß $|\lambda|$ nicht größer ist als die gegebene makroskopische Meßungenauigkeit von einem der f_n'' bzw. f_n'.

c) Es gibt ein Gebiet Γ' im Phasenraum, eine Menge von Δ_n', für die b) gilt und eine Zahl τ von der Größenordnung einer realen makroskopischen Meßdauer, so daß auch $|\lambda'|$ nicht größer als die gegebene Meßungenauigkeit ist. Wenn es mehrere Möglichkeiten der Wahl für die Δ_n' gibt, sollen sie so gewählt werden, daß zuerst Δ_1' möglichst klein ist, dann Δ_2' möglichst klein usw.

Wenn diese drei Postulate erfüllt sind, braucht man die einzelnen f_n'' und f_n' und ebenso die Δ_n'' und Δ_n' nicht immer zu unterscheiden und schreibt dann kurz f_n, womit dann irgendein Repräsentant bezeichnet werden soll.

d) f_n (mit $n \leq m$) soll symmetrisch in den $X_1, \ldots, X_n$ sein. Bezüglich der $x_1, \ldots, x_N$ ist es per Definition symmetrisch.

e) Es soll mit $n \leq m$ und einer evtl. von n abhängigen Konstanten α

$$\int f_n \, d\bar{x}_n = \alpha f_{n-1} \quad \text{sein.}$$

Von wirklichem Interesse sind nur die f_n, die nicht von anderen $f_{n'}$ abhängen. D. h.

f) f_n soll nicht in dem Teil Γ' des Γ - Raumes, für den a) b) c) gilt, eine Funktion der $f_{n'}$ mit $n' < n \leq m$ sein.

Funktionen f_n, die a) bis f) erfüllen, heißen BOLTZMANNsche Dichtefunktionen. Es ist nicht ausgeschlossen, daß es im Γ - Raum mehrere Gebiete Γ' gibt, in denen jeweils für andere Mengen $\Delta_n'(X)$ a) bis f) erfüllt sind. Das könnte z. B. dann eintreten, wenn ein System verdünnt wird. Für das Folgende bringt aber diese Möglichkeit keine Komplikationen. Die Forderungen b) und c) wurden bisher so gestellt, daß sie für alle Punkte in μ_n gelten sollen. Es

kann nun der Fall eintreten, daß sie für bestimmte Zustände x nur für eine Teilmenge μ_n' erfüllt sind, was anschaulich bedeutet, daß nur ein Teilsystem (in dem hier gebrauchten Sinne) makroskopisch beschreibbar ist. Solche Zustände spielen in der Theorie des Meßvorganges eine Rolle und sollen hier ebenfalls nicht betrachtet werden. Hinter der scheinbaren Kompliziertheit der obigen Postulate verbirgt sich nun eine einfache physikalische Bedeutung, die jetzt diskutiert werden soll. Weiß man von einem System, daß an ihm eine bestimmte Funktion $f_n(X \mid x)$ mit einer entsprechenden Ungenauigkeit vorliegt, so kann man nicht genau auf den Zustand x des Systems zurückschließen, aber "ungefähr", denn nach a) ist ja gesichert, daß X und $X^{f}(x)$ nicht beliebig voneinander abweichen. Durch die Funktionen f_n wird also der exakte Zustand x in bestimmter Weise vergröbert (sog. coarse graining), und es liegt nahe, die f_n mit den entsprechenden Ungenauigkeiten, also Streifen σ', die die oben eingeführten σ enthalten, als die groben (oder makroskopischen) Zustände zu bezeichnen. Solche groben Zustände spielen aber bei allen Behandlungen des makroskopischen Verhaltens eine große Rolle, und man kann erwarten, daß die f_n zu Aussagen über das makroskopische Verhalten von allgemeinen Systemen führen, ähnlich wie in der Gaskinetik die f_1 für Gase. Nach den Forderungen b) und c) ergibt sich aus der Unabhängigkeit von der Rasterlage eine gewisse, nur kleine räumliche und zeitliche Schwankung der f_n, auch eine Eigenschaft, die bei "makroskopischen Observablen" zu erwarten ist. Wenn also f_n die gewünschten Eigenschaften b) und c) hat, wird man mit seiner Hilfe zu Aussagen über das makroskopische Verhalten des betreffenden Systems kommen. Daraus rechtfertigen sich auch die am Anfang dieses Paragraphen gegebenen Definitionen. Problematisch ist Forderung c) in der Hinsicht, daß in konkreten Fällen eine Zeitmittelung nicht ausführbar ist. Ein weiterer Mangel der Theorie der f_n ist, daß die ungefähre Größenordnung der Δ_n und von τ gegeben sein muß, um die f_n festzulegen. Daß in den Bedingungen b) und c) "bestimmte" Größenordnungen gewählt wurden, lag nur daran, daß, wie oben bereits betont, nur das makroskopische Verhalten mechanischer Systeme beschrieben

werden soll. Insgesamt scheint aber das ganze Konzept der f_n noch mehr zu umfassen als die makroskopische Beschreibung. Es ist bisher nicht gelungen, anders als durch Vorgabe von bestimmten Größenordnungen die Möglichkeiten für die f_n einzuschränken, und es ist fraglich, ob eine andere Möglichkeit im Rahmen der klassischen Mechanik überhaupt besteht. Rein anschaulich wird man ferner vermuten, daß die Größen von Δ_n und τ in b) und c) nicht völlig unabhängig sind. Das läßt sich für f_1 so plausibel machen: Ein Punkt des Punktschwarmes Σ_τ wird eine bestimmte Rasterzelle in der Zeit nicht verlassen können, d. h. f_1 ändert sich nicht, wenn diese groß genug ist, (und seine Geschwindigkeit und Beschleunigung nicht zu groß ist). Die Größenordnungen von Δ_1 und τ werden also "proportional" sein. Unten wird noch gezeigt, daß auch ein Zusammenhang zwischen Δ_1 und Δ_n besteht. Die Forderungen b) und c) werden also nur für bestimmte Systeme erfüllt sein. Würde man nur b) fordern, so wäre das makroskopische Verhalten (wenn es wie oben definiert würde) nur eine kombinatorische Eigenschaft von Punktschwärmen. Durch c) wird es physikalisch, d. h. durch die HAMILTON - Funktion des Systems bestimmt. Die Forderung b) ist darüberhinaus auch eine Bedingung, die das bequeme Rechnen mit den Funktionen f_n garantiert: Die genaue Lage des Rasters braucht nicht bekannt zu sein, und man kann auch mit den Funktionen f_n' rechnen. Es lassen sich dann also die Werte von Observablen der Form

$$A(x_1, \cdots, x_N) = \sum B(x_{\nu_1}, \cdots, x_{\nu_n}) \qquad \text{(II, 14)}$$

mit symmetrischem B als Integral schreiben:

$$A(x) = \int B(\bar{x}) f_n(\bar{x}|x) d^n\bar{x} + \lambda(A), \qquad \text{(II, 15)}$$

wenn B innerhalb einer Rasterzelle $\Delta_n(X)$ "hinreichend" wenig schwankt. Es ist für manche Betrachtungen angenehmer, nicht mit Funktionen des Typs f_n' oder f_n'' zu rechnen, sondern irgendwelche Funktionen $f_n(X)$ aus dem Streifen $\sigma(x)$ zu betrachten, die den Bedingungen d) e) f) genügen und als $f_n(X|x)$ einzuführen. Auch solche $f_n(X|x)$ heißen

BOLTZMANNSCHE Dichten. Besonderes Interesse hätten z. B. differenzierbare f_n, so daß die Differentialquotienten ungefähr gleich sind den Differenzenquotienten, genommen über einen Abstand, der gleich dem Abstand der Mittelpunkte der Rasterzellen ist.

Für d) und e) lassen sich keine physikalischen Argumente bringen, sondern nur, daß sich in diesen Fällen mit den f_n bequem rechnen läßt.

Forderung e) ist dann mit $\alpha = N - n + 1$ für f_n' erfüllt, wenn $V(\Delta_n'(X)) = V_n$ ist für alle X' und wenn mit $\hat{X} = (X_1, \ldots, X_{n-1})$ und $\hat{\Delta}'_{n\,n-1}(\bar{X}', \hat{\bar{X}}) = \left\{ \bar{X}_n'' \mid (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_{n-1}, \bar{X}_n'') \in \Delta_n'(\bar{X}') \right\}$

$$\int \hat{D}_n'(\bar{X}', \bar{X})\, d\bar{X}_n = V(\hat{\Delta}'_{n\,n-1}(\bar{X}', \hat{\bar{X}}))\, \hat{D}'_{n-1}(\hat{\bar{X}}', \hat{\bar{X}}) \qquad \text{(II, 16)}$$

und $V(\hat{\Delta}'_{n\,n-1}) = V(X')$ gilt. Dasselbe ist dann auch für f_n'' richtig. Der Beweis ergibt sich aus der Entwicklung von f_n' nach $\hat{D}_n'$: Es ist

$$\int f_n'\, d\bar{X}_n = V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} \int \hat{D}_n'(\bar{X}^{\rho(x)}, \bar{X})\, d\bar{X}_n \,. \qquad \text{(II, 17)}$$

Alle Summanden, für die die n - 1 ersten Komponenten von X, also $X_1, \ldots\ldots, X_{n-1}$ in $\hat{\Delta}'_{n-1}(\hat{X}^{\rho}(x))$ liegen, sind von Null verschieden, wobei $\hat{X}^{\rho}(x)$ ein aus den n - 1 ersten Komponenten von $X^{\rho}(x)$ gebildeter Vektor sein soll. Die jeweiligen n-ten Komponenten sind willkürlich, da über den ganzen Raum integriert wird. Daraus folgt:

$$\int f_n'(\bar{X}, \bar{X}_n \mid x)\, d\bar{X}_n = V^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} V(\hat{\Delta}'_{n\,n-1}(\bar{X}^{\rho(x)}\, \bar{X}))\, \hat{D}'_{n-1}(\bar{X}^{\rho(x)}, \bar{X}) \,. \qquad \text{(II, 18)}$$

Aus der Voraussetzung (II, 16) folgt aber $V_n^{-1} \cdot V(\hat{\Delta}'_{n\,n-1}(\bar{X}^{\rho}, \bar{X})) = V^{-1}(\Delta'_{n-1}(\bar{X}))$, und zu jedem $\hat{X}^{\rho}$ gibt es $N - n + 1$ gleiche $\hat{X}^{\kappa}$, die aber aus anderen X entstanden sind. Daraus folgt:

$$\int f_n' \, d\Gamma_n = (N-n+1) \, f_{n-1}' \quad . \qquad \text{(II, 19)}$$

Eine Sonderstellung unter den Postulaten a) - f) nimmt die Forderung f) ein: Sie ist nicht unbedingt notwendig, und, wenn sie nicht erfüllt ist, ist f_n nur eine Abkürzung für einen komplizierten Ausdruck in den $f_{n'}$, mit $n' < n$. Aber andererseits ist es in vielen Fällen von Interesse zu wissen, ob f_n unabhängig von den anderen $f_{n'}$ existiert, und im allgemeinen soll unter f_n auch nur die unabhängige Funktion verstanden werden. Wo f_n evtl. nur Abkürzung ist, wird dies besonders hervorgehoben.

4. Spezielle Wahl der $\Delta_n'(X)$

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sollen nun $\Delta_n'(X)$ und $\Delta_n''(X)$ explizit eingeführt werden. Dazu wird vorausgesetzt, daß die q bzw. Q kartesische Koordinaten und die p bzw. P die entsprechenden Impulse sind. Dann sei $\Delta_n'(X)$ die Menge aller X' in μ_n mit

$$\begin{aligned}
-\varepsilon_1^j &\le \bar{X}_1^j - \bar{X}_1^{j'} < \varepsilon_1^j \\
-\varepsilon_2^j &\le \bar{X}_2^j - \bar{X}_1^j - \bar{X}_2^{j'} + \bar{X}_1^{j'} < \varepsilon_2^j \\
&\vdots \\
-\varepsilon_n^j &\le \bar{X}_n^j - \bar{X}_{n-1}^j - \bar{X}_n^{j'} + \bar{X}_{n-1}^{j'} < \varepsilon_n^j \quad .
\end{aligned} \qquad \text{(II, 20)}$$

Dabei ist $\varepsilon_r^j > 0$, $X_s^j = P_s^j$ für $j = 1, 2, 3$ und $X_s^j = Q_s^{j-3}$ für $j = 4, 5, 6$. Um $\Delta_n''(X)$ zu definieren, bildet man ein Gitter in μ_n, dessen Elementarzellen durch eine Auswahl aus den $\Delta_n'(X)$ gegeben sind: Es sei $\nu_\ell = (\varepsilon_\ell^j \cdot \varepsilon_\ell^j)$ mit geraden Zahlen ε_ℓ^j und $R_{(k)} = (r_1, \ldots, r_n)$, wobei die Numerierung der $R_{(k)}$ beliebig ist. Dann bildet man $X_{(k)} = X_{(0)} + R_{(k)}$ und definiert $\Delta_n''(X) = \Delta_n'(X_{(k)})$, wenn $X \in \Delta_n'(X_{(k)})$. Für verschiedene $X_{(0)}$ erhält man verschiedene $\Delta_n''(X)$. Für festes $X_{(0)}$ überdecken sie den ganzen μ_n- Raum, stellen also ein festes Raster dar.

In allen folgenden Betrachtungen werden meist nur die zuletzt eingeführten Mengen vom Typ Δ'_n und Δ''_n und daraus hergeleitete Größen betrachtet. Es ist daher zweckmäßig, eine andere Bezeichnung zu wählen, und zwar sollen alle bisher gestrichenen Größen, also Δ'_n, f'_n usw., wenn Δ'_n nach (II, 20) definiert ist, als Δ^1_n, f^1_n usw. bezeichnet werden, in gleicher Weise alle Größen vom Typ der zweigestrichenen als Δ^2_n, f^2_n usw.

Im Anschluß an diese Definition lassen sich noch einige mathematische Eigenschaften der f^1_n und f^2_n angeben. Definiert man $\hat{\Delta}^1_n(X)$ wie $\Delta^1_n(X)$ nur mit dem Unterschied, daß die Zeichen $\leqq$ und $<$ vertauscht sind, so folgt sofort: Dann und nur dann ist $X \in \Delta^1_n(X')$, wenn $X' \in \hat{\Delta}^1_n(X)$. Ist $(X, X') \in M = \bigcup_Y \{Y\} \times \Delta'_n(Y)$, so ist $\hat{\Delta}^1_n(X)$ der (bereits in §2 eingeführte) Schnitt von M mit der Ebene X', d. h. $M = \bigcup_Y \hat{\Delta}'_n(Y) \times \{Y\}$. Symbolisch kann man schreiben (A° = offener Kern, A^- = abgeschlossene Hülle)

$$\hat{\Delta}'_n(\bar{X}) = \Delta'^\circ_n(\bar{X}) \cup (\Delta'^-_n(\bar{X}) - \Delta'_n(\bar{X})). \qquad \text{(II, 21)}$$

Wie in §2 werden die Funktionen D^1_n und $\hat{D}^1_n$ definiert durch

$$D^1_n(\bar{X}', \bar{X}) = C\{\Delta'_n(\bar{X}')\}(\bar{X}) \qquad \text{(II, 22)}$$

und

$$\hat{D}^1_n(\bar{X}, \bar{X}') = C\{\hat{\Delta}'_n(\bar{X})\}(\bar{X}'). \qquad \text{(II, 23)}$$

Da aus $X \in \Delta^1_n(X')$ immer folgt, $X' - X \in \Delta^1_n(0)$, ist $D^1_n(X, X') = D^1_n(X' - X, 0)$ und ebenso $\hat{D}^1_n(X, X') = D^1_n(X - X', 0)$. Allgemein gilt noch $D^1_n(X', X) = \hat{D}^1_n(X, X')$. Statt $D^1_n(X', X)$ schreibt man auch $D^1_n(X' - X)$ und ebenso $\hat{D}^1_n(X - X')$ statt $\hat{D}^1_n(X, X')$.

Ferner ist

$$V(\Delta'_n(\bar{X})) = V(\hat{\Delta}'_n(\bar{X}')) = V(\Delta^2_n(\bar{X}'')) = V_n = 2^{6n} \prod_{j,\ell} \varepsilon^j_\ell \,. \qquad \text{(II, 24)}$$

Denn

$$V_n = \prod_{j=1}^{6} \left[\int_{-\varepsilon_1^j}^{\varepsilon_1^j} dt_1 \int_{t_1-\varepsilon_2^j}^{t_1+\varepsilon_2^j} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}-\varepsilon_n^j}^{t_{n-1}+\varepsilon_n^j} dt_n \right] =$$

(II,25)

$$= \prod_{j=1}^{6} \left[\int_{-\varepsilon_1^j}^{\varepsilon_1^j} dt_1 \cdots \int_{t_{n-2}-\varepsilon_{n-1}^j}^{t_{n-2}+\varepsilon_{n-1}^j} dt_{n-1} \cdot 2\varepsilon_n^j \right]$$

Man hat also die Entwicklung für die f_n^1:

$$f_n^1(\bar{X}|x) = V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} D_n^1(\bar{X} - \bar{X}^\rho(x))$$

(II, 26)

$$= V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} \hat{D}_n^1(\bar{X}^\rho(x) - \bar{X}) .$$

f_n^1 ist also auch bzgl. X meßbar, da es eine Summe von meßbaren Funktionen ist. Die f_n^1 sind Stufenfunktionen bzgl. X, was auch anschaulich einleuchtend ist. In §2 war bewiesen worden, daß der Punktschwarm $\Sigma_n(x)$ eineindeutig den Punkten x und Perm (x) zugeordnet ist. Aus der Entwicklung für f_n^1 folgt nun, daß f_n^1 eineindeutig durch den Punktschwarm Σ_n bestimmt ist. Daher ist auch f_n^1 eineindeutig x und den Punkten Perm (x) zugeordnet, eine für die Kap. III und IV wesentliche Eigenschaft der f_n^1. Der Beweis ist anschaulich unmittelbar klar. Formal ergibt er sich so: Angenommen es ist $f_n^1(X|x) = f_n^1(X|x')$ und $X^\rho(x) \equiv X^{\rho'}(x') \equiv X'^{\rho'}$ für $\rho(\rho') = 1, \ldots, r(r') \leq L_n$. Man bildet nun den von X^ρ und $X'^{\rho'}$ aufgespannten Polyeder. Sei z. B. X^1 ein extremer Randpunkt des Polyeders. Daraus folgt: es existiert ein $X \in \hat{\Delta}_n^1(X^1)$, was in keinem $\hat{\Delta}_n^1(X^\nu)$ oder $\hat{\Delta}_n^1(X'^\kappa)$ liegt, wenn nicht $X^\nu = X^1$ oder $X'^\kappa = X^1$ ist. Da das letztere nach Voraussetzung unmöglich ist, folgt $f_n^1(X|x) \neq f_n^1(x|x')$.

Dieselben Überlegungen lassen sich nun auch für Δ_n^2 und f_n^2 durchführen. Es ist nach Definition mit $X' \in \Delta_n^2(X)$ auch $X \in \Delta_n^2(X')$, d. h. aber $\hat{\Delta}_n^2(X) = \Delta_n^2(X)$ und $\hat{D}_n^2 = D_n^2$. Als Entwicklung hat man dann

$$f_n^2(\bar{X} \mid x) = V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} \vartheta_n^2(\bar{X}^{\rho(x)}, \bar{X}) \,. \qquad \text{(II, 27)}$$

Die f_n^2 sind also ebenfalls bzgl. X meßbar, sie sind Stufenfunktionen auf den $\Delta_n^2(X)$, was auch unmittelbar anschaulich einzusehen ist. Nach Definition ist immer $f_n^2(X_{(k)} \mid x) = f_n^1(X_{(k)} \mid x)$, wo $X_{(k)}$ die zur Definition von Δ_n^2 benutzten Gittervektoren sind. Daraus folgt aber:

$$f_n^2(\bar{X} \mid x) = \sum_k f_n^1(\bar{X}_{(k)} \mid x)\, \vartheta_n^1(\bar{X}_{(k)} - \bar{X}) \,. \qquad \text{(II, 28)}$$

Kennt man also f_n^1, so kennt man alle f_n^2, und für D_n^2 erhält man

$$\vartheta_n^2(\bar{X}, \bar{X}') = \sum_k \vartheta_n^1(\bar{X}_{(k)} - \bar{X})\, \vartheta_n^1(\bar{X}_{(k)} - \bar{X}) \,. \qquad \text{(II, 29)}$$

Durch Mittelung von f_n^1 kann man sich eine Funktion f_n^3 herstellen, die stetig in X ist und die demselben Streifen wie f_n^1 angehört. Das beweist man so: Es sei

$$f_n^3(\bar{X} \mid x) = V_n^{-1} \int \vartheta_n^1(\bar{X} - \bar{X}')\, f_n^1(\bar{X}' \mid x)\, d^n\bar{X}' \,. \qquad \text{(II, 30)}$$

Setzt man die Entwicklung für f_n^1 ein, so erhält man

$$f_n^3 = V_n^{-2} \sum_{\rho=1}^{L_n} V(\Delta_n^1(\bar{X}) \cap \Delta_n^1(\bar{X}^{\rho(x)})) \,. \qquad \text{(II, 31)}$$

Mit

$$\alpha_s^j(\bar{X}, \bar{X}^\rho) = \mathrm{Min}\,(\bar{X}_s^j - \bar{X}_{s-1}^j + \varepsilon_s^j,\ \bar{X}_s^{j\rho} - \bar{X}_{s-1}^{j\rho} + \varepsilon_s^j) \qquad \text{(II, 32)}$$

und

$$\beta_s^j(\bar{X}, \bar{X}^\rho) = \mathrm{Max}\,(\bar{X}_s^j - \bar{X}_{s-1}^j - \varepsilon_s^j,\ \bar{X}_s^{j\rho} - \bar{X}_{s-1}^{j\rho} - \varepsilon_s^j) \qquad \text{(II, 33}$$

und der Definition $D_n^3(X, X^\rho) = V_n^{-1} V(\Delta_n^1(X) \frown \Delta_n^1(X^\rho))$ ist dann, wie sich aus (II, 25) ergibt

$$D_n^3 = V^{-1} \prod_{j=1}^{6} \prod_{s=1}^{n} (\alpha_s^j - \beta_s^j) . \qquad \text{(II, 34)}$$

Daraus folgt sofort die Stetigkeit. Ferner ist nach Definition $D_n^3(X, X') = D_n^3(X', X)$ und $D_n^3(X, X') = D_n^3(X - X', 0)$, wofür auch $D_n^3(X - X')$ geschrieben wird. Die Funktion D_n^3 ist in einer Menge Δ_n^3 von Null verschieden, die aus $\Delta_n^{1\,0}$ (dem offenen Kern von Δ_n^1) dadurch hervorgeht, daß ε_s^j durch $2\,\varepsilon_s^j$ ersetzt wird. Daß f_n^3 den Streifen $\sigma(x)$ um f_n^1 nicht verläßt, sieht man so: f_n^3 entsteht durch Mittelung über Werte von f_n^1, die f_n^1 in einer Menge $\Delta_n^{1\,0}(X)$ annimmt. Zu jedem Wert von f_n^1 in $\Delta_n^{1\,0}(X)$ gibt es ein f_n^2, das gleich f_n^1 ist und diesen Wert auch für X annimmt. Daher liegt f_n^3 in dem Streifen um f_n^1. Für später ist noch wichtig, daß auch f_n^3 eineindeutig durch Σ_n bestimmt ist. Der Beweis ergibt sich genau wie bei f_n^1. Da $X^\rho(x)$ in x stetig ist, ist auch $f_n^3(X \mid x)$ in x stetig.

Eine weitere Funktion von großem praktischen Interesse gewinnt man aus f_n^3 durch Mittelung über ein $\tilde{\Delta}_n$, das zu Δ_n^1 ähnlich ist, aber mit anderen ε_s^j gebildet wird. Es seien $V(\tilde{\Delta}_n) = \tilde{V}_n$ und $\tilde{D}_n$ die entsprechenden Größen, dann bildet man

$$f_n^4(\bar{X} \mid x) = \tilde{V}_n^{-1} \int \tilde{D}_n(\bar{X} - \bar{X}') f_n^3(\bar{X}' \mid x)\, d^n\bar{X}' . \qquad \text{(II, 35)}$$

Allgemein gilt für $\tilde{\varepsilon}_s^j > 0$, daß f_n^4 differenzierbar ist. Wenn aber $\tilde{\varepsilon}_s^j$ hinreichend klein ist, so gehört f_n^4 auch zu dem Streifen um f_n^1. Definiert man $D_n^4 = \tilde{V}_n^{-1} \int \tilde{D}_n\, D_n^3\, d^n X'$, so ist D_n^4 auf einer Menge Δ_n^4 von Null verschieden, die wie Δ_n^{10} aber mit $2\,\varepsilon_s^j + \tilde{\varepsilon}_s^j$ gebildet ist. Aus der Definition folgt noch, daß $D_n^4(X, X') = D_n^4(X - X', 0)$ ist, wofür wieder $D_n^4(X - X')$ geschrieben wird. Da $D_n^4(X - X^\rho(x))$ nach den Komponenten von $X^\rho(x)$ differenzierbar ist, ist also auch f_n^4 nach x differenzierbar. Die Entwicklung für f_n^4 lautet:

$$f_n^4(\bar{X}|x) = V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} D_n^4(\bar{X} - \bar{X}^{\rho}(x)) \,, \qquad \text{(II, 36)}$$

woraus, wie auch für f_n^3, die Eindeutigkeit dieser Darstellung folgt.

Es ist jetzt nachzuprüfen, ob für die hier gewählten f_n^1, f_n^2, f_n^3 und f_n^4 die Bedingungen a) bis f) erfüllt sind.

Forderung a), die ja nur eine willkürliche Festlegung enthält, ist für f_n^1 und f_n^2 erfüllt. Da f_n^3 und f_n^4 in demselben Streifen liegen, machen auch sie näherungsweise Angaben über die Anzahlen von Elementen des Punktschwarmes in Umgebungen. Später wird noch $\varepsilon_r^1 = \varepsilon_r^2 = \varepsilon_r^3 = \delta_r$ und $\varepsilon_r^4 = \varepsilon_r^5 = \varepsilon_r^6 = \eta_r$ gesetzt.

Für $\Delta^{1,2}$ gilt die Bedingung (II, 16), so daß auch e) für die $f_n^{1,2}$ richtig ist. Ebenso läßt sich e) auch für f_n^3 und f_n^4 zeigen. Es ist z. B.

$$\int f_n^3 \, d\bar{X}_n = V_n^{-1} \int d^{n-1}\bar{X}' \left[\int d\bar{X}_n \, d\bar{X}_n' \, D_n^1(\bar{X} - \bar{X}') f_n^1(\bar{X}'|x) \right] . \qquad \text{(II, 37)}$$

Führt man die Integration über X_n aus, so erhält man, da (II, 16) gilt,

$$\int D_n^1(\bar{X} - \bar{X}') \, d\bar{X}_n = V(\hat{\Delta}_{n,n-1}^1(\bar{X}', \bar{X})) \, D_{n-1}^1(\bar{X} - \bar{X}') \,, \qquad \text{(II, 38)}$$

wobei $V(\hat{\Delta}_{n,\,n-1}^1(X', X))$ nicht von X' und X abhängt. Wird jetzt die Integration über X_n' ausgeführt, so gibt die ekkige Klammer:

$$V(\hat{\Delta}_{n,n-1}^1(\bar{X}', \bar{X})) \, D_{n-1}^1(\bar{X} - \bar{X}') \, f_{n-1}^1(\bar{X}'|x) \,. \qquad \text{(II, 39)}$$

Daraus folgt die Behauptung. Fast wörtlich derselbe Beweis gilt für f_n^4.

Für die anderen Bedingungen lassen sich jedoch keine allgemeinen Beweise angeben. Für d) läßt sich zeigen, daß es näherungsweise erfüllt ist, was für die einzelnen unten zu behandelnden Spezialfälle durchgeführt wird. Für f) läßt

sich plausibel machen, wann es erfüllt sein kann und wann nicht, was für f_2 durchgeführt wird. Für die Bedingungen b) und c) lassen sich ebenfalls nur einige plausible Argumente finden, daß es nicht ausgeschlossen ist, b) und c) erfüllt zu finden. Es wäre wünschenswert, b) und c) durch andere leichter durchschaubare Bedingungen zu ersetzen. Bei späteren Überlegungen wird vorausgesetzt, daß es Systeme gibt, für die b) und c) gelten, und es wird die als Annahme I bezeichnete Hypothese gemacht, daß die mechanischen Modelle realer makroskopischer Systeme gerade die hier als makroskopisch bezeichneten Systeme sind. In Zukunft soll die Abkürzung f_n für irgend eine der Funktionen f_n^1, f_n^2, f_n^3 oder f_n^4 benützt werden.

f_1: Nach der Definition ist also $f_1^1(X \mid x)$ die Anzahl der Punkte x_r dividiert durch $V_1 = 2^6 \delta_1^3 \cdot \eta_1^3$, für die gilt:

$$-\delta_1 \leq p_1^j - p_r^j < \delta_1$$
$$-\eta_1 \leq q_1^j - q_r^j < \eta_1 \,. \qquad \text{(II, 40)}$$

Ebenso ist $f_1^2(X \mid x)$ gleich der Anzahl der Punkte x_r dividiert durch $V_1 = 2^6 \delta_1^2 \eta_1^3$, für die

$$-\delta_1 \leq p_{1k}^j - p_r^j < \delta_1$$
$$-\eta_1 \leq q_{1k}^j - q_r^j < \eta_1 \qquad \text{(II, 41)}$$

gilt und wo außerdem

$$-\delta_1 \leq p_{1k}^j - p_1^j < \delta_1$$
$$-\eta_1 \leq q_{1k}^j - q_1^j < \eta_1 \qquad \text{(II, 42)}$$

ist.

Für f_1 brauchen nur die Bedingungen b) und c) untersucht zu werden und das wiederum auch nur für f_1^1 und f_1^2, da f_1^3 und f_1^4 automatisch b) und c) erfüllen, wenn f_1^1 und f_1^2 dies tun.

Jedem Punkte $x \in \Gamma$ entspricht im μ_1 - Raum ein Volumen $V(\Omega_1)$, wobei Ω_1 die kleinste den Punktschwarm Σ_1 enthaltende konvexe Menge sein soll. Sie kann z. B. im Ortsraum durch das Volumen des Systems bestimmt sein. Es erscheint plausibel, daß bei großen mittleren Besetzungszahlen m_1 der Zellen Δ_1 am ehesten ein Erfülltsein der Bedingung b) zu erwarten ist, da bei nicht "zu ungünstiger" Lage der Punkte x_ν ($\nu = 1, \ldots, N$) dann eine Verschiebung des Rasters zu nicht "zu großen" relativen Änderungen führen wird. Es muß also N genügend groß sein. Andererseits ist die Zellengröße durch $N\, V^{-1}(\Omega_1) = m_1\, V^{-1}(\Delta_1)$ mit m_1 gekoppelt: Größere Zahlen m_1 verlangen also auch größere Volumina $V(\Delta_1)$. Andererseits kann sich aber die Wahl zu großer Rasterzellen wieder ungünstig für die Forderung b) auswirken, und schließlich ist ja auch die Größenordnung von Δ_1 durch Bedingung b) ungefähr festgelegt. Man kann also erwarten, daß nicht nur N, sondern auch $N\, V^{-1}(\Omega_1)$ entsprechend groß sein muß, um "glatte" f_1 zu bekommen.

Innerhalb der durch den Streifen $\sigma(x)$ gegebenen Genauigkeit kann man <u>immer</u> eine Zeit τ finden, so daß f_1 mit seinem Zeitmittel $\overline{f_1}^{\tau}$ nahezu übereinstimmt. Aber wenn f_1 auf Modelle realer makroskopischer Systeme angewendet wird und wenn f_1 etwas mit "makroskopischen Observablen" zu tun haben soll, so ist τ als die Zeitdauer einer Messung vorgegeben. Damit ist aber auch ungefähr die Größe von $V(\Delta_1)$ festgelegt, und es ist nicht selbstverständlich, daß bei Vorgabe von τ beide Forderungen b) und c) gleichzeitig erfüllbar sind, auch wenn die Rasterzellen so gewählt werden können, daß entweder b) oder c) erfüllt ist.

Ein numerisches Beispiel möge zur Illustration der Größen N, $N\, V^{-1}(\Omega_1)$ und m_1 dienen: Das System sei ein H_2 - Gas unter normalen Verhältnissen. Dann sind pro cm^3 ungefähr $3 \cdot 10^{19}$ Teilchen vorhanden und der maximale Impuls $p_{max} = m_H \cdot 2 \cdot 10^5$ gcm sec^{-1}. Bei einer Kantenlänge von $m_H 10^5$ gcm sec^{-1} muß man dann den Impulsraum in 10^8 Rasterzellen einteilen. Wählt man im Ortsraum die Kantenlänge der Rasterzellen 10^{-2} cm, so ist $m_1 = 3 \cdot 10^5$. In diesem Falle wird man also b) und c) als erfüllt ansehen können. Es könnte

aber auch sein, daß man mit wesentlich geringeren mittleren Besetzungszahlen auskommt. Dies würde Konsequenzen für die Unabhängigkeit der höheren f_n haben, wie an dem numerischen Beispiel für f_2 zu sehen ist.

f_2: Die Definition für $f_2^1(X_1, X_2 \mid x)$ lautet nach (II, 20): f_2^1 ist die Anzahl der Punktpaare (x_{r_1}, x_{r_2}) mit $r_1 \neq r_2$ dividiert durch $V_2 = 2^{12} \cdot \delta_1^3 \cdot \delta_2^3 \cdot \eta_1^3 \cdot \eta_2^3$, für die (II, 40) und

$$-\delta_2 \leq P_2^j - P_1^j - P_{r_2}^j + P_{r_1}^j < \delta_2$$
$$-\eta_2 \leq Q_2^j - Q_1^j - q_{r_2}^j + q_{r_1}^j < \eta_2 \qquad \text{(II, 43)}$$

gilt. Ebenso ist $f_2^2(X_1, X_2 \mid x)$ gleich der Anzahl der Punktpaare (x_{r_1}, x_{r_2}) mit $r_1 \neq r_2$ dividiert durch $V_2 = 2^{12} \cdot \delta_1^3 \cdot \delta_2^3 \cdot \eta_1^3 \cdot \eta_2^3$, für die (II, 41), (II, 42) und

$$-\delta_2 \leq P_{2k}^j - P_{1k}^j - P_{r_2}^j + P_{r_1}^j < \delta_2$$
$$-\delta_2 \leq P_{2k}^j - P_{1k}^j - P_2^j + P_1^j < \delta_2 \qquad \text{(II, 44)}$$

und Entsprechendes für Q und q gilt.

Daß in dieser Definition die gleichen Zahlen δ_1 und η_1 auftreten, wie sie zur Definition von f_1 benutzt wurden, hat seinen Grund darin, daß bei einer anderen Wahl die Forderung e) nicht erfüllt sein könnte.

Als erstes sollen nun b) und c) für f_2^1 und f_2^2 betrachtet werden. Wie oben kommt auch jedem Punkt im Γ - Raum eine konvexe Menge Ω_2 im μ_2 - Raum zu, die von den Elementen des Punktschwarmes $\Sigma_2(x)$ gerade ausgefüllt wird. Es ist $\Omega_2 = \Omega_1 \times \Omega_1$. Aus den bei f_1 gemachten Voraussetzungen über N und $N V^{-1}(\Omega_1)$ folgt sofort, daß auch $N(N-1)V^{-1}(\Omega_2)$ genügend groß ist. Ferner wird man auch die mittlere Besetzungszahl $m_2 = N(N-1)V^{-1}(\Omega_2)$ als groß annehmen müssen, um die Gültigkeit der Bedingung b) erwarten zu können. Da N als groß vorausgesetzt war, kann man also m_2

ebenfalls groß wählen. Es liegt nahe anzunehmen, daß $m_2 = m_1$ genügt, und daraus kann man auf die Größe von $V(\Delta_2)$ schließen. Es ist nämlich:

$$\frac{m_1^2}{V(\Delta_1)^2} = \frac{N(N-1)}{V(\Omega_1)^2} = \frac{m_2}{V(\Delta_2)} = \frac{m_1}{V(\Delta_2)} \quad . \qquad \text{(II, 45)}$$

Daraus folgt $V(\Delta_2) = V(\Delta_1)^2 \; m_1^{-1}$. Für die Größen δ_2 und η_2 erhält man damit:

$$\delta_2 = m_1^{-\sigma} \delta_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 = m_1^{-\rho} \eta_1$$

mit $3\sigma + 3\rho = 1$.

Nimmt man X_1 und X_2 als eindimensional an, so ergibt sich für die Mengen $\Delta_2(X_1, X_2)$ folgende Form:

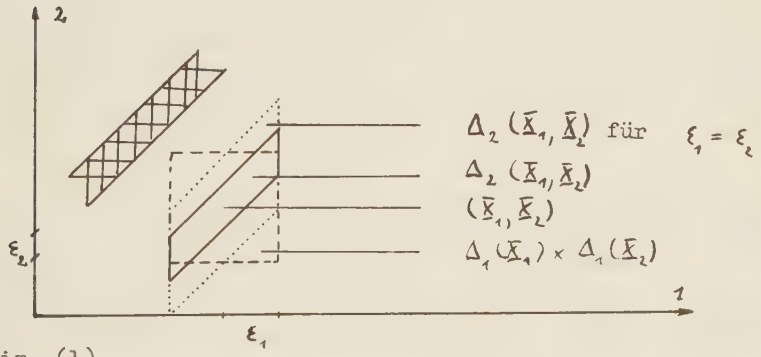

Fig. (1)

Im Anschluß an Fig. (1) lassen sich noch zwei Folgerungen ziehen, die f) und d) für f_2^1 und f_2^2 betreffen. Zunächst ist klar, daß man bei der Wahl der Δ_2 von der Art der gestrichelten Umgebung, d. h. als Quadrat, statt f_2 das Produkt $f_1 \cdot f_1$ (für $|X_1^j - X_2^j| > \varepsilon_1^j$) erhält. Würde man aber f_2 statt mit $\delta_2 < \delta_1$ und $\eta_2 < \eta_1$ mit $\delta_2 \approx \delta_1$ und $\delta_2 \gtrsim \delta_1$ definieren, so müßte man ebenfalls Faktorisierung von f_2 erwarten. Denn wenn Forderung b) erfüllt ist, wird der gestrichelte dem gepunkteten Raster äquivalent sein. Um also f_2 sinnvoll zu definieren, muß man $\delta_2 = \alpha \delta_1$ und $\eta_2 = \beta \eta_1$ mit nicht "zu großen" Faktoren $\alpha < 1$ und $\beta < 1$ wählen. Nach (15) ist $\alpha = m_1^{-\sigma}$ und $\beta =$

$= m_1^{-\varrho}$. Die Wechselwirkung der Teilchen liefert aber wie im Falle f_1 bei gegebenem τ ebenfalls eine Rasterzellengröße. Damit ließe sich dann prinzipiell entscheiden, ob die Größen α und β so gewählt werden können, daß die Forderungen b), d) und f) gleichzeitig erfüllt sind. Es ist zu vermuten, daß man in Fällen von praktischem Interesse $\sigma = \varrho = \frac{1}{6}$ setzen kann.

Zur Frage nach der Symmetrie bezüglich Vertauschung der X_1 und X_2 läßt sich folgendes sagen: $f_2^\nu(\nu = 1, 2)$ wäre dann symmetrisch, wenn $\Delta_2^\nu(X_2, X_1)$ aus $\Delta_2^\nu(X_1, X_2)$ durch Spiegelung an der Ebene $X_1 = X_2$ hervorginge, was aber nicht der Fall ist. f_2^ν ist mit Hilfe von Rasterzellen definiert, die in der Figur 1 längsgestreift sind. Die gespiegelten sind aber von der Form der quergestreiften. Je kleiner nun ε_2^j ist, umso eher kann man aus b) schließen, daß der Unterschied beider Rasterzellen keine Rolle spielt, daß also $f_2^\nu(\nu = 1, 2)$ als näherungsweise symmetrisch in den X_1 und X_2 angesehen werden kann. Da f_2^3 und f_2^4 immer in dem Streifen $\sigma(x)$ der f_2^2 liegen, gilt dann die Symmetrie auch für diese Funktionen näherungsweise.

Die bisherigen Überlegungen zeigten, wie man die Zellen Δ_2 ungefähr wählen muß, um überhaupt die Existenz von sinnvollen und unabhängigen Funktionen $f_2^\nu(\nu = 1, 2)$ erwarten zu können. Offen blieb dabei noch, ob sich nicht trotzdem die f_2 auf nur f_1 enthaltende Ausdrücke reduzieren lassen. Es ergeben sich dabei drei Fragen.

1. Besteht exakt oder näherungsweise eine Relation der Form ($f_2 = f_2^\nu$, $\nu = 1, 2, 3, 4$)

$$f_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2 | x) = h(f_1(\bar{X}_1 | x), f_1(\bar{X}_2 | x)) \qquad \text{(II, 46)}$$

für alle x und alle X_1, X_2?

2. Gibt es Bereiche in Γ, in denen (II, 46) für alle X_1, X_2 exakt oder näherungsweise gilt?

3. Lassen sich mit der Definition der f_1, f_2 verträgliche Bedingungen für die Abhängigkeit der f_1, f_2 von den X_1, X_2 angeben, so daß (II, 46) in gewissen Bereichen des μ_2-Raumes für den Punkt x exakt oder näherungsweise gilt, der

die betreffende Abhängigkeit gerade liefert. Alle drei Probleme lassen sich nicht allgemein lösen, sondern es lassen sich nur Bedingungen angeben, die erfüllt sein müssen, wenn sich f_2 nicht auf f_1 reduzieren soll. Es seien jetzt f_1, f_2 irgendwie nach derselben Definition aber fest gewählt.

Betrachtet man im Γ - Raum die Mengen $\Lambda(f_1 \mid x)$ und $\Lambda(f_2 \mid x)$ der x, die dieselbe funktionale Abhängigkeit von den X_1, X_2 für die f_1 und f_2 liefern, d. h. für die $f_2(X \mid x) = f_2(X \mid x')$ und $f_1(X \mid x) = f_1(X \mid x')$ ist, so folgt aus der universellen Gültigkeit von (II, 46), daß diese Bereiche für f_1 und f_2 übereinstimmen müssen. (Das Umgekehrte gilt nicht!)
Da f_n^1, f_n^3 und f_n^4 eineindeutig den Punkten x und Perm x zugeordnet sind, bietet das vorliegende Kriterium keine Anhaltspunkte dafür, ob Gleichung (II, 46) gilt oder nicht. Da Forderung e) z. B. auch für f_2^2 erfüllt ist, folgt leicht aus der Definition der Mengen $\Lambda(f_1^2 \mid x)$ und $\Lambda(f_2^2 \mid x)$, daß $\Lambda(f_2^2 \mid x) \subset \Lambda(f_1^2 \mid x)$. Man hätte also, um Gleichung (II, 46) für f_2^2 zu prüfen, nur zu sehen, ob es Punkte x' gibt, die in $\Lambda(f_1^2 \mid x)$, aber nicht in $\Lambda(f_2^2 \mid x)$ enthalten sind.

Wenn Gleichung (II, 46) nur in einem bestimmten Bereich im Γ - Raum erfüllt sein soll, so gehört zu diesem Bereich sicher eine ganze Menge $\Lambda(f_2 \mid x)$. Setzt man $f_2(X \mid \mathring{x}) = \bar{f}_2(X)$ und $f_1(X \mid \mathring{x}) = \bar{f}_1(X)$, so lautet Gleichung (II, 46) dann:

$$\bar{f}_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = h\left(\bar{f}_1(\bar{X}_1), \bar{f}_1(\bar{X}_2)\right). \qquad \text{(II, 47)}$$

Daraus folgt aber, daß sich $h(Z_1, Z_2)$ dann nicht als eindeutige Funktion bestimmen läßt, wenn nicht mit

$$\bar{f}_1(\bar{X}_2') = \bar{f}_1(\bar{X}_2'') \text{ und } \bar{f}_1(\bar{X}_1') = \bar{f}_1(\bar{X}_1'') \qquad \text{(II, 48)}$$

auch immer

$$\bar{f}_2(\bar{X}_1', \bar{X}_2') = \bar{f}_2(\bar{X}_1'', \bar{X}_2'') \qquad \text{(II, 49)}$$

ist. Aber auch das Umgekehrte gilt: Wenn aus (II, 48) immer (II, 49) folgt, so gibt es ein $h(Z_1, Z_2)$, daß (II, 47) erfüllt ist. Der Beweis ist folgendermaßen: Es sei

$$(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \longrightarrow U = \bar{f}_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \qquad \text{(II, 50)}$$

und

$$(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \longrightarrow (Z_1, Z_2) = (\bar{f}_1(\bar{X}_1), \bar{f}_1(\bar{X}_2)). \qquad \text{(II, 51)}$$

Umgekehrt existiert eine Menge $M(Z_1, Z_2)$, die alle Punkte (X_1, X_2) enthält, für die $(X_1, X_2) \longrightarrow (Z_1, Z_2)$ ist. Da nach Voraussetzung für alle $(X_1, X_2) \in M(Z_1, Z_2)$ auch gilt $(X_1, X_2) \longrightarrow U$, existiert eine eindeutige Funktion $h(Z_1, Z_2) = U$.

Diese Funktion h war innerhalb eines Bereiches $\Lambda(f_2 \mid x)$ konstruiert worden, hängt also noch von $\Lambda(f_2 \mid x)$ ab. Die zuerst behandelte Frage nach der universellen Gültigkeit von (II, 46) stellt sich hier also so, ob in jedem Bereich Λ aus Gleichung (II, 48) Gleichung (II, 49) folgt und ob die so evtl. konstruierten Funktionen $h(\Lambda \mid Z_1, Z_2)$ von Λ nicht abhängen.

Zum dritten Problem, das die lokale Reduzierung von f_2 auf f_1 im μ_2 - Raum betrifft, kann man anhand von Figur 1 sofort sagen, daß sich f_2 sicher dann faktorisieren läßt, wenn es in einer genügend großen Umgebung eines Punktes (X_1, X_2) (hinreichend) konstant ist. Der Punkt x muß also Anlaß zu einer lokalen Gleichverteilung geben. Betrachtet man das für f_1 angeführte numerische Beispiel und nimmt an, daß $\sigma = \rho = \frac{1}{6}$ ist, so erhält man $\mathcal{S}_2 = \frac{1}{10}\,\mathcal{S}_1$ und $\eta_2 = \frac{1}{10}\,\eta_1$. Durch f_2 ließe sich also hier die Zweierkorrelation der Teilchen um das 10 - fache genauer bestimmen als ihre Lage im Orts- und Geschwindigkeitsraum. Bei Flüssigkeiten liegen wegen der großen Massendichte die Verhältnisse günstiger.

Der allgemeine Fall: Zunächst ist klar, daß die Forderung b) nicht bis zu beliebig hohen $n \leq N$ erfüllt sein kann, da schon die mittleren Dichten $d_n = N(N-1)\ldots$.

$\ldots(N - n + 1)\, V(\Omega_n)^{-1}$ für große n stark abnehmen. Da Forderung e) von allen f_n^{ν} ($\nu = 1, \ldots, 4$) erfüllt wird, folgt aber, daß Forderung b) für alle $f_{n'}^{\nu}$ mit $n' < n$ und $\nu = 1, 2$ erfüllt ist, wenn sie es für f_n^{ν} ist. Wie bei f_2 ergibt sich auch hier, daß die ε_r^j ($r = 2, \ldots, n$) nicht so gewählt werden dürfen, daß $\Delta_n(X_1, \ldots, X_n)$ und $\Delta_1(X_1)x\ldots x\ \Delta_1(X_n)$ ungefähr äquivalente Raster sind, was z. B. der Fall wäre, wenn $\varepsilon_r^j = \varepsilon_1^j$ ($r = 2, \ldots, n$) gewählt würde, da sonst f_n faktorisierbar sein würde. Wenn m_n die mittlere Besetzungszahl von Δ_n ist, erhält man für nicht zu große n:

$$\frac{m_n^n}{V(\Delta_1)^n} = \frac{N^n}{V(\Omega_1)^n} = d_n = \frac{m_n}{V(\Delta_n)}\ , \qquad \text{(II, 52)}$$

und, da f_n nicht faktorisierbar sein soll, d. h. $m_1^n \gg m_n$ sein muß, vermutet man, daß man, um Forderung b) zu erfüllen, mit $m_n = m_1$ auskommt. Daraus folgt dann

$$V(\Delta_n) = m_1^{1-n}\, V(\Delta_1)^n\ . \qquad \text{(II, 53)}$$

Es entsteht nun die Frage, wie der "Gewinn" m_1^{n-1} auf die Größen $\delta_2, \eta_2, \ldots\ldots, \delta_n, \eta_n$ verteilt werden muß. $\Delta_n^1(X)$ ist die Menge aller X, für die

$$\begin{aligned} -\delta_1 &\le P_1^j - P_1^{j'} < \delta_1 \\ &\vdots \\ -\delta_n &\le P_n^j - P_{n-1}^j - P_n^{j'} + P_{n-1}^{j'} < \delta_n \end{aligned} \qquad \text{(II, 54)}$$

ist und für die Analoges für Q gilt. Wählt man jetzt $\delta_r = \delta_1$ und $\eta_r = \eta_1$ ($r \neq 1$), so ist zu erwarten, daß der durch (II, 54) bestimmte Raster äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\delta_1 &\le P_1^j - P_1^{j'} < \delta_1 \\ &\vdots \\ -\delta_{r-1} &\le P_{r-1}^j - P_{r-2}^j - P_{r-1}^{j'} + P_{r-2}^{j'} < \delta_{r-1} \end{aligned} \qquad \text{(II, 55)}$$

$$
\begin{aligned}
-\delta_r \leq P_r^{j} - P_r^{j'} &< \delta_r \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad &\vdots \\
-\delta_n \leq P_n^{j} - P_{n-1}^{j} - P_n^{j'} + P_{n-1}^{j'} &< \delta_n
\end{aligned}
\qquad \text{(II, 55)}
$$

ist, d. h. $\Delta_n^1(X)$ und $\Delta_{r-1}^1(X_1, \ldots\ldots, X_{r-1}) \times \Delta_{n-r-1}^1(X_r, \ldots .., X_n)$ werden äquivalent sein, wenn der "Gewinn" aus Gleichung (II, 53) nicht auf alle δ_r, η_r $(r \neq 1)$ gleichmäßig verteilt wird. Man würde also statt f_n das Produkt $f_{r-1} \cdot f_{n-r+1}$ bekommen. Da aber zusätzlich zu dieser der Forderung f) widersprechenden Eigenschaft auch noch f_{r-1} und f_{n-r+1} mit einem schärferen Raster definiert wäre, ist es fraglich, ob die Funktionen f_{r-1} und f_{n-r+1} überhaupt sinnvoll nach Forderung b) existieren würden. Die Mehrteilchenkorrelation kann also, wie nicht anders zu erwarten, durch f_n nicht genauer festgelegt werden als die Zweiteilchenkorrelation. Das allgemeine Problem der Abhängigkeit der f_n von den $f_{n'}$ mit $n' < n$ soll hier nicht behandelt werden. Die Symmetrie erhält man mit den gleichen Argumenten wie bei f_2. Nach dem numerischen Beispiel erhielte man auch im allgemeinen Fall eine Verfeinerung der δ_r, η_r um 0, 1 gegenüber δ_1, η_1.

Alle in der obigen speziellen Diskussion die Forderung b) und c) betreffenden Betrachtungen können nicht den Rang allgemeiner Beweise beanspruchen, sondern sie dienen nur dem Plausibelmachen und der Illustration. Im folgenden wird daher die Annahme I gemacht. An den Betrachtungen dieses Paragraphen, sofern sie Forderung b) und c) betreffen, fällt auf, daß von der speziellen Wahl des Rasters kein Gebrauch gemacht wird. Es ist daher zu erwarten, daß es noch andere mögliche Rastertypen gibt, die genau dasselbe leisten, wie der hier besprochene. Diese Frage soll jedoch nicht weiter verfolgt werden.

5. Eigenschaften der f_n im Γ - Raum

In diesem und dem folgenden Paragraphen sollen einige mehr mathematische Überlegungen angestellt werden, die für Ka-

pitel III und IV von Bedeutung sind. Und zwar werden in §5 erstens die Bereiche "konstanter" f_n in Γ betrachtet, zweitens deren Maße bzw. Inhalte, und drittens wird eine Integration über die Menge der Funktionen f_n eingeführt.

Zunächst werden ganz allgemeine f_n' betrachtet. Durch

$$d^2(f_m' \mid x, x') = \int \left[f_m'(\bar{x} \mid x) - f_m'(\bar{x} \mid x') \right]^2 d^n \bar{x} \qquad \text{(II, 56)}$$

ist eine Abstandsfunktion $d(f_n' \mid x, x')$ in Γ definiert, die alle Axiome einer Metrik erfüllt, außer dem, daß nicht notwendig aus $d(f_n' \mid x, x') = 0$ die Beziehung $x = x'$ folgt, wobei vorausgesetzt ist, daß f_n' exakt, sonst aber beliebig nach (II, 4), also in ganz Γ, definiert ist. Schreibt man statt $d(f_n' \mid x, x') = 0$ auch $x \sim x'$, so ist $x \sim x'$ eine Äquivalenzrelation. Es ist nämlich $d(f_n' \mid x, x) = 0$, und aus $d(f_n' \mid x, x') = 0$ folgt wegen $d(f_n' \mid x, x') = d(f_n' \mid x', x)$ auch $d(f_n' \mid x', x) = 0$. Ferner ist mit $d(f_n' \mid x, x') = 0$ und $d(f_n' \mid x', x'') = 0$ wegen der Dreiecksgleichung auch $d(f_n' \mid x, x'') = 0$. Durch die Relation $x \sim x'$ wird also der Γ - Raum in Äquivalenzklassen eingeteilt, die mit $\Lambda(f_n' \mid x)$ bezeichnet werden sollen, wobei $x \in \Lambda(f_n' \mid x)$ sein soll. Es ist dann mit $x' \in \Lambda(f_n' \mid x)$ auch $\Lambda(f_n' \mid x') = \Lambda(f_n' \mid x)$. Aus $x \sim x'$ folgt mit (II, 56), daß

$$f_m'(\bar{x} \mid x) = f_m'(\bar{x} \mid x') \text{ f. ü. in } \mu_m . \qquad \text{(II, 57)}$$

Die $\Lambda(f_n' \mid x)$ sind also die Bereiche in Γ, für die (II,57) gilt. Setzt man voraus, daß die Λ BOREL - Mengen sind, und bildet man zu der Menge $\mathfrak{M}$ der $\Lambda(f_n' \mid x)$ die BORELSCHE Erweiterung $\mathfrak{L}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{L}(f_n')$, so sind die Λ die Atome von $\mathfrak{L}(f_n')$, und $\mathfrak{L}(f_n') \subset \mathfrak{Q}$, wo $\mathfrak{Q}$ der σ - Körper der BORELSCHEN Mengen in Γ ist. Im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also das mit einem Intervallmaß μ gebildete Wahrscheinlichkeitsfeld $(\Gamma, \mathfrak{L}(f_n), \mu)$ eine Vergröberung von $(\Gamma, \mathfrak{Q}, \mu)$, da mindestens ein Λ zwei verschiedene Punkte x und x', nämlich x und Perm(x) enthält.

Wählt man als f_n' die f_n^{ν} ($\nu = 1, 2, 3, 4$), so sind f_n^3 und

f_n^4 stetig und die f_n^1 und f_n^2 Stufenfunktionen in μ_n und (II, 57) gilt dann punktweise. Dabei kann man sich aus physikalischen Gründen auf den Teil Γ' des Γ - Raumes beschränken, für den die Forderungen b) und c) erfüllt sind. Für diese Funktionen lassen sich noch einige später wichtige Betrachtungen anschließen. Hat man die Einteilung von Γ' mit einem bestimmten f_n gemacht, so entsteht die Frage wie sich die anderen $\tilde{f}_n = f_n + \lambda$ zu dieser Einteilung verhalten. Ist $d(f_n \mid x, x') = 0$, so folgt:

$$d^2(f_n + \lambda \mid x, x') = \int \left[\lambda(f_n(\xi \mid x)) - \lambda(f_n(\xi \mid x'))\right] d^u \xi \quad \text{(II, 58)}$$

Ist λ_m eine Zahl, die von $|\lambda|$ nicht überschritten wird, so ist *

$$\sup_{\lambda} d^2(f_n + \lambda \mid x, x') \leq 4 \lambda_m^2 \, Max\left[V(\Omega_n(x)), V(\Omega_n(x'))\right] \quad \text{(II, 59)}$$

D. h. aber, ist der Abstand für eine bestimmte Wahl der f_n gleich Null, so übersteigt er auch für andere f_n eine bestimmte Schranke nicht. Die Umkehrung dieses Satzes gilt im allgemeinen nicht. Für die f_n^ν können nun die $\Lambda(f_n^\nu \mid x)$ explizit angegeben werden. Früher (S. 20) war schon die eindeutige Zuordnung von f_n^1, f_n^3 und f_n^4 zu der Menge $\{x, \text{Perm}(x)\}$ gezeigt worden. Man hat also $\Lambda(f_n^\nu \mid x) = \{x, \text{Perm}(x)\}$ für $\nu = 1, 3, 4$. Um $\Lambda(f_n^2 \mid x)$ zu bestimmen, benutzt man ein allgemeines Verfahren, das für die f_n' die Menge $\hat{\Lambda}$ aller Punkte x mit punktweise derselben Funktion $f_n'(X \mid x)$ zu berechnen gestattet.

Es seien P_ρ Permutationen der Form $P_\rho = \prod_{\alpha=1}^{n} (\alpha, \nu_\alpha)$ für ganze Zahlen α und ν_α mit $\nu_\alpha = 1, \ldots\ldots, N$. Der Index ρ hat dann $L_n = N(N-1)\ldots\ldots(N-n+1)$ verschiedene Werte, also genau so viel, wie es Variationen von N Stück zur n-ten Klasse gibt. Bei dem Beweis der Meßbarkeit von $f_n'(X \mid x)$ bezüglich x treten die Funktionen $\tilde{\zeta}_\rho\{\Delta_m'(\xi)\}$ (*) auf, die charakteristische Funktionen auf Zylindermengen $\hat{\Lambda}_\rho(X)$ sind. Für $\hat{\Lambda}_\rho$ ergibt sich

---

Def. von Ω_n: $\Omega_n = \Omega_1 x \ldots . x\, \Omega_1$; Def. von S. 25 f.

$$\hat{\Lambda}_\rho(\bar{\underline{x}}) = \left\{ x \mid P_\rho(x) \in \Delta'_n(\bar{\underline{x}}) \times \mu_1^{N-n} \right\} . \qquad \text{(II, 60)}$$

Man kann also schreiben

$$f'_n(\bar{\underline{x}} \mid x) = V^{-1}(\Delta_n(\bar{\underline{x}})) \sum_{\rho=1}^{L_n} C\left\{ \hat{\Lambda}_\rho(\bar{\underline{x}}) \right\}(x) . \qquad \text{(II, 61)}$$

Es sei jetzt $Z'(X \mid x)$ die Menge der Indizes ρ, für die

$$C\left\{ \hat{\Lambda}_\rho(\bar{\underline{x}}) \right\}(\overset{\circ}{x}) = \begin{cases} 1 , & \rho \in Z'(\bar{\underline{x}} \mid \overset{\circ}{x}) \\ 0 , & \rho \notin Z(\bar{\underline{x}} \mid \overset{\circ}{x}) . \end{cases} \qquad \text{(II, 62)}$$

Dann ist sicher $f'_n(X \mid x) = f'_n(X \mid \overset{\circ}{x})$ für ein festes X, wenn $x \in \tilde{\Lambda}(X \mid \overset{\circ}{x})$, wobei

$$\tilde{\Lambda}(\bar{\underline{x}} \mid \overset{\circ}{x}) = \bigcap_{\rho \in Z'} \hat{\Lambda}_\rho(\bar{\underline{x}}) \cap \bigcap_{\rho' \notin Z'} C \hat{\Lambda}_{\rho'}(\bar{\underline{x}}) \qquad \text{(II, 63)}$$

ist, und $f'_n(X \mid x) = f_n(X \mid \overset{\circ}{x})$ für alle X sicher dann, wenn $x \in \bigcap_{\bar{\underline{x}}} \tilde{\Lambda}(X \mid \overset{\circ}{x})$. Aber auch für jede mögliche Permutation der Indizes ρ erhält man Mengen, deren Punkte die gleichen Funktionen $f'_n(X \mid x)$ ergeben. Die möglichen Permutationen der Indizes ρ sind aber die, zu denen es Punktschwärme gibt, die die permutierte Reihenfolge als natürliche haben. Diese Punktschwärme entstehen aber gerade durch alle Permutationen (vgl. §2) der Argeumente, in diesem Falle des $\overset{\circ}{x}$. Man hat also

$$\hat{\Lambda}(f'_n \mid \overset{\circ}{x}) = \bigcup_{\text{Perm}(\overset{\circ}{x})} \bigcap_{\bar{\underline{x}} \in \mu_n} \tilde{\Lambda}(\bar{\underline{x}} \mid \overset{\circ}{x}) . \qquad \text{(II, 64)}$$

Mit $f'_n = f_n^2$ ist aber $\Lambda(f_n^2 \mid x) = \hat{\Lambda}(f_n^2 \mid x)$.

Formel (II, 64) läßt sich für diesen Fall noch weiter ver-

einfachen, da die Durchschnittsbildung über $X \in \mu_n$ nur scheinbar kontinuierlich ist. Die Mengen Z' seien mit Z^2 bezeichnet. Dann hängen die $\tilde{\Lambda}_\rho(X)$ und die $Z^2(X \mid x)$ nur von der Wahl des Rasters, also von $X_{(0)}$ und von der Rasterzelle, d. h. von $R_{(k)}$ bzw. k ab. Man hat daher $\tilde{\Lambda}_\rho = \tilde{\Lambda}_\rho(X_{(0)}, k)$ und $Z^2 = Z^2(X_{(0)}, k \mid x)$ und (II, 64) wird

$$\Lambda(f_n^2 \mid x) = \bigcup_{\rho \in \mathrm{Perm}(x)} \bigwedge_k \tilde{\Lambda}(\bar{X}_{(0)}, k \mid x). \quad \text{(II, 65)}$$

Daraus folgt sofort die Meßbarkeit von $\Lambda(f_n^2 \mid x)$.
Wegen der Endlichkeit des Punktschwarmes gibt es aber auch von den ursprünglichen Rastern verschiedene, die die Mengen Z^2 ungeändert lassen. Es sollen jetzt die Mengen $E = \{X_{(0)}\}$ bestimmt werden, die jeweils alle $X_{(0)}$ enthalten, für die die zugehörigen Raster die gleichen $Z^2(X_{(0)}, k \mid x)$ bei festem x geben. Dazu führt man die zu den Kanten von Δ_n^2 parallelen Vektoren $Y_{(s)}(s = 1, \ldots\ldots, n)$ ein. Ferner betrachtet man ein Raster, d. h. ein $X_{(0)}$, für das mindestens ein Punkt von $\Sigma_n(x)$ auf einer Zellenoberfläche liegt. Die Rasterzellenoberfläche besteht aus Ebenenstücken, von denen je zwei parallel sind und von denen aber nur je eins zu Δ_n^2 gehört. Zu jedem $s = 1, \ldots\ldots, n$ wird nun der kürzeste von Null verschiedene und zu $Y_{(s)}$ parallele Vektor $U_{(s)}$ aller Vektoren gesucht, die man von einem nicht zu Δ_n^2 gehörenden Oberflächenstück (das nicht parallel zu $Y_{(s)}$ ist) zu allen Punkten $X^\rho \in \Sigma_n(x)$ innerhalb jeder Rasterzelle ziehen kann. Von den $U_{(s)}$ wird ein zu $\hat{\Delta}_n^1$ affines Parallelepiped $\hat{\Delta}_n^U(X_{(0)})$ aufgespannt, und alle Raster mit $X'_{(0)} \in E(X_{(0)}) = \{X_{(0)} + \hat{\Delta}_n^U(X_{(0)})\}$ ergeben dieselben Mengen Z^2. Da es nur endlich viele Punkte in $\Sigma_n(x)$ gibt und da die möglichen $X'_{(0)}$ nur in $\Delta_n^2(0)$ zu liegen brauchen (größere ergeben denselben Raster), kann jeder Punkt $X^\rho(x)$ nur auf endlich vielen Rasteroberflächen liegen. Die Konstruktion der Mengen $E(X_{(0)})$ kann also nur zu endlich vielen verschiedenen E_r führen.

Mit den Mengen Λ verwandt sind andere Mengen $\Xi_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 2, 3, 4$, die in den Kapiteln III und IV eine besondere Rolle spielen werden. Und zwar ist $\Xi_n^2(x)$ die Menge aller

Punkte x', für die ein f_n^2 existiert, so daß $d(f_n^2 \mid x, x') = 0$ ist, d. h.

$$\Xi_n^2(x) = \bigcup_{\bar{\xi}(o) \in \Delta_n^2(o)} \Lambda(f_n^2 \mid x), \qquad \text{(II, 66)}$$

und $\Xi_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 3, 4$ ist die Menge aller Punkte x', für die $f_n^\nu(X \mid x')$ in einem Streifen $\sigma_n^\nu(x)$ liegt, d. h.

$$\Xi_n^\nu(x) = \left\{ x' \mid f_n^\nu(\bar{\xi}(x') \in \sigma_n^\nu(x) \right\}. \qquad \text{(II, 67)}$$

Dabei wird über den Streifen $\sigma_n^1(x)$ noch vorausgesetzt, daß er den in §3 definierten Streifen $\sigma(x)$ enthält und daß, wenn $f_n^1(X \mid x')$ in $\sigma_n^1(x)$ liegt, auch $f_n^1(X \mid x)$ in $\sigma_n^1(x')$ ist. $\sigma_n^3(x)$ und σ_n^4 sei so gewählt, daß $\Xi_n^3(x) = \Xi_n^4(x) = \Xi_n^1(x)$ ist. Damit gilt dann für alle vier Mengentypen die Beziehung: Aus $x' \in \Xi_n^\nu(x)$ folgt $x \in \Xi_n^\nu(x')$. Alle Ξ_n^ν haben eine einfache physikalische Bedeutung: Hat man nämlich f_n^ν mit einer Ungenauigkeit gemessen, die nicht kleiner als die durch $\sigma(x)$ bzw. $\sigma_n^\nu(x)$ induzierte ist, so kann man über den Zustand des Systems nur aussagen, daß es in einer Menge liegt, die ein $\Xi_n^\nu(x)$ umfaßt. (Wegen dieser für alle f_n geltenden Aussage kann man vermuten, daß nicht nur (per Definition) $\Xi_n^1(x) = \Xi_n^3(x) = \Xi_n^4(x)$ ist, sondern daß sich auch $\Xi_n^2(x)$ physikalisch nicht "sehr stark" von $\Xi_n^1(x)$ unterscheidet, wovon aber nirgends Gebrauch gemacht wird.) Ferner ist ebenfalls wegen der anschaulichen Bedeutung der $\Xi_n^\nu(x)$ zu vermuten, daß sie nicht irgendwie pathologisch, sondern daß sie mindestens meßbar sind. Formal ergibt sich die Meßbarkeit von $\Xi_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 3, 4$ wie folgt: Die Grenzen von $\sigma_n^\nu(x)$ im Punkte X seien $g^\nu(X \mid x)$ und $h^\nu(X \mid x)$ mit $g^\nu \leq h^\nu$. Dann ist wegen der Meßbarkeit von $f_n^\nu(X \mid x)$ bzgl. x die Menge

$$\prod^\nu(\bar{\xi} \mid x) = \left\{ x' \mid g^\nu(\bar{\xi} \mid x) \leq f_n^\nu(\bar{\xi} \mid x) \leq h^\nu(\bar{\xi} \mid x) \right\} \qquad \text{(II, 68)}$$

meßbar, und es gilt:

$$\Xi_n^\nu(x) = \bigwedge_{\bar{X} \in \mu_n} \prod^\nu(\bar{X} \mid x) \quad . \qquad \text{(II, 69)}$$

Es sei Ω_n eine abzählbare dichte Menge in μ_n. Da die f_n^ν, $\nu = 1, 3, 4$ entweder einfache Stufenfunktionen oder stetig sind, gehört ein f_n^ν schon dann ganz zu $\sigma_n^\nu(x)$, wenn $f_n^\nu(X \mid x)$ für $X \in \Omega_n$ zwischen $h^\nu(X \mid x)$ und $g^\nu(X \mid x)$ liegt, d. h.

$$\Xi_n^\nu(x) = \bigwedge_{\bar{X} \in \Omega_n} \prod^\nu(\bar{X} \mid x) \quad , \qquad \text{(II, 70)}$$

und daraus folgt die Meßbarkeit von $\Xi_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 3, 4$. Da die Mengen Ξ_n^2 für die weiteren Anwendungen nicht benötigt werden, wird ihre Meßbarkeit hier nicht bewiesen.

Neben Λ und Ξ_n^ν ist noch eine dritte Sorte von Mengen von physikalischem Interesse, nämlich

$$\Theta_\gamma(f_n \mid x) = \{ x' \mid d(f_n \mid x, x') \leq \gamma \}, \qquad \text{(II, 71)}$$

wobei $f_n = f_n^\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$) ist. Wählt man

$$\gamma \geq \sup_{x' \in \Xi_n^\nu(x)} d(f_n \mid x, x') \quad , \qquad \text{(II, 72)}$$

so ist

$$\Xi_n^\nu(x) \subset \Theta_\gamma(f_n \mid x). \qquad \text{(II, 73)}$$

Diese Mengen Θ_γ kommen in den folgenden Anwendungen nur für den Fall $f_n = f_n^\nu$, $\nu = 3, 4$ vor. Die Frage nach der Meßbarkeit von Θ_γ soll daher nur für diesen Fall beantwortet werden. Für $\nu = 3, 4$ ist $d(f_n^\nu \mid x', x)$ bei festem x eine stetige Funktion von x'. Durch d^{-1} wird also das abgeschlossene Intervall $0 \leq d \leq \gamma$ auf eine abgeschlossene Menge in Γ abgebildet. Nach Definition ist diese aber gerade $\Theta_\gamma(f_n \mid x)$, und daraus folgt die Meßbarkeit. Wie be-

reits oben bemerkt, gilt im allgemeinen nicht, daß mit $x' \in \Theta_\gamma (f_n | x)$ auch $f_n(X | x') = f_n(X | x) + \lambda(f_n)$ folgt. Da jedoch nach der Wahl der Δ'_n in der Form Δ^ν_n ($\nu = 1, 2$) die $f_n = f^\nu_n$ Stufenfunktionen sind, kann man eine Schranke für die Differenz

$$g = f_n(\bar{x} | x) - f_n(\bar{x} | x') \qquad \text{(II, 74)}$$

angeben. f_n sei dazu vom Typ f^2_n. Es ist also nach Voraussetzung

$$\int g^2 \, d^n \bar{x} \leq \gamma^2, \qquad \text{(II, 75)}$$

und wegen der Normierung

$$\int g \, d^n \bar{x} = 0 ; \qquad \text{(II, 76)}$$

d. h. aber, g muß positive und negative Werte annehmen. Diese können mit (II, 75) am größten werden, wenn g nur auf zwei charakteristischen Funktionen von Rasterzellen Δ^2_{n1} und Δ^2_{n2} von Null verschieden ist, d. h.

$$g = \alpha' C\{\Delta^2_{n1}\} - \alpha' C\{\Delta^2_{n2}\}, \quad \alpha' > 0. \qquad \text{(II, 77)}$$

(Es ist natürlich fraglich, ob ein solches g wirklich als Differenz zweier f^2_n auftreten kann, was für die folgende Abschätzung aber belanglos ist.)

Daraus folgt mit (II, 75) und $V(\Delta^2_{n1}) = V(\Delta^2_{n2}) = V_n$

$$\gamma^2 \geq 2 \alpha'^2 V_n . \qquad \text{(II, 78)}$$

Man hat also als obere Schranke für g :

$$\alpha' = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2 V_n}} . \qquad \text{(II, 79)}$$

Die anderen Funktionen f^ν_n($\nu = 1, 3, 4$) können aber eben-

falls keine schmaleren Zacken als Differenzen haben als f_n^2, so daß α' auch für diese Funktionen eine obere Schranke der bei $d \leq \gamma$ möglichen Differenzen g darstellt. Damit aber für f_n^1, f_n^3 oder f_n^4 eine möglichst schmale Zacke zustande kommt, müssen sehr viele Punkte eines Punktschwarmes sehr dicht liegen. Es ist also zu erwarten, daß solche Punktschwärme bei nicht zu pathologischen Kräften zu energetisch sehr verschiedenen Zuständen gehören werden, was für Kap. IV wichtig ist. Oben war ein BOREL - Körper $\mathfrak{L}(f_n)$ angegeben worden, der die Λ als Atome hat. Physikalisch von Bedeutung sind aber noch andere BOREL-Körper, die aus den Ξ_n^ν und Θ_γ gebildet werden. Es seien $\Omega \subset \Gamma'$ und $\Omega' \subset \Gamma'$ Mengen für die $\bigcup_{x \in \Omega} \Xi_n^\nu(x) \supset \Gamma'$ und $\bigcup_{x \in \Omega'} \Theta_\gamma \supset \Gamma'$ ist. Für die Mengensysteme $\mathfrak{L} = \{ \Theta_\gamma(f_n \mid x) \mid x \in \Omega' \}$ und $\mathfrak{E} = \{ \Xi_n^\nu(x) \mid x \in \Omega \}$ bilde man die BORELSCHEN Erweiterungen $\mathfrak{L}(\mathfrak{E}) = \mathfrak{L}(n, \nu \mid \Omega)$ und $\mathfrak{L}(\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}(f_n \mid \Omega')$. $\mathfrak{L}(f_n \mid \Omega')$ und $\mathfrak{L}(n, \nu \mid \Omega)$ enthalten dann keine größeren Atome als Θ_γ bzw. Ξ_n^ν.

Die bisherigen Betrachtungen waren alle für ein festes n durchgeführt worden, und es entsteht nun die Frage, wie sich die Resultate bei Änderung von n ändern. Für die $f_n = f_n^\nu(\ \nu = 1, 2, 3, 4)$ besteht exakt die Gleichung:

$$\int f_n \, d\bar{X}_n = \alpha f_{n-1}, \qquad \text{(II, 80)}$$

und aus dem Bestehen dieser Beziehung kann man schließen, daß $\Lambda(f_n \mid x) \subset \Lambda(f_{n-1} \mid x)$ ist. Es folgt aber sogar noch mehr, nämlich daß entweder $\Lambda(f_{n-1} \mid x) = \Lambda(f_n \mid x)$ oder $\Lambda(f_{n-1} \mid x) = \bigcup_\rho \Lambda(f_n \mid x_\rho)$ ist. Denn ist $x' \in \Lambda(f_{n-1} \mid x)$, $\tilde{x} \in \Lambda(f_n \mid x)$ und $\tilde{\tilde{x}}' \in \Lambda(f_n \mid x')$, so folgt

$$f_{n-1}(\bar{\bar{x}} \mid \tilde{\tilde{x}}') - f_{n-1}(\bar{\bar{x}} \mid \tilde{x}) =$$

$$= \int \left[f_n(\bar{\bar{x}} \mid \tilde{\tilde{x}}') - f_n(\bar{\bar{x}} \mid \tilde{x}) \right] d\bar{\bar{X}}_n = \qquad \text{(II, 81)}$$

$$= \int \left[f_n(\bar{\bar{x}} \mid x) - f_n(\bar{\bar{x}} \mid \tilde{x}) - \right.$$

$$- f_n(\bar{\xi} \mid x') + f_n(\bar{\xi} \mid \tilde{x}')\Big] \, d\bar{\xi}_n = 0, \qquad \text{(II, 81)}$$

d. h. aber, auch $\tilde{x}$ und $\tilde{x}'$ gehören zu $\Lambda(f_{n-1} \mid x)$. Daraus folgt, daß auch $\Xi_n^2(x) \subset \Xi_{n-1}^2(x)$ ist. Ob auch $\Xi_n^\nu(x) \subset \Xi_{n-1}^\nu(x)$ ist für $\nu = 1, 3, 4$ hängt von den $\sigma_n^\nu(x)$ ab. Wenn jedoch durch $\sigma_n^\nu(x)$ die Meßungenauigkeit von f_n^ν wiedergegeben wird, so ist aus physikalischen Gründen anzunehmen, daß dann, wenn $f_n^\nu(X \mid x)$ und $f_n^\nu(X \mid x')$ nicht zu unterscheiden sind, daraus abgeleitete Größen, nämlich $f_{n-1}^\nu(X \mid x)$ und $f_{n-1}^\nu(X \mid x')$ ebenfalls nicht zu unterscheiden sind. Wenn also mit $f_n^\nu(X \mid x') \subset \sigma_n^\nu(x)$ auch $f_{n-1}^\nu(X \mid x') \subset \sigma_{n-1}^\nu(x)$ ist, so gilt $\Xi_n^\nu(x) \subset \Xi_{n-1}^\nu(x)$ für $\nu = 1, 3, 4$. Für die $\Theta_y(f_n \mid x)$ gilt natürlich auch eine ähnliche Aussage. Wegen

$$\int \Big[f_n(\bar{\xi} \mid x) - f_n(\bar{\xi} \mid x') \Big]^2 d^n\bar{\xi} \geq \qquad \text{(II, 82)}$$

$$\geq \int \Big[\int f_n(\bar{\xi} \mid x) \, d\bar{\xi}_n - \int f_n(\bar{\xi} \mid x') \, d\bar{\xi}_n \Big]^2 d^{n-1}\bar{\xi}$$

folgt nämlich $\Theta_y(f_n \mid x) \subset \Theta_y(f_{n-1} \mid x)$.
Man kann also sagen, daß mit zunehmendem n alle Einteilungen höchstens feiner werden.

Es werden jetzt drei Eigenschaften des Maßes von $\Xi_n^\nu(x)$, also von $V(\Xi_n^\nu(x))$ betrachtet. Und zwar soll 1.) gezeigt werden, daß $V(\Xi_n^\nu(x))$ weder null noch unendlich ist, 2.) wird $V(\Xi_n^\nu(x))$ als Funktion von x untersucht, und es soll 3.) plausibel gemacht werden, daß $V(\Xi_n^\nu(x))$ in einem noch zu präzisierendem Sinne nicht stark mit x schwankt.

Da alle Punkte $X^\varrho(x)$ des Punktschwarmes $\Sigma_n(x)$ stetig und sogar komponentenweise wie die Komponenten von x variieren, ändert sich $f_n^1(X \mid x)$ nur in Gebieten von der Ausdehnung ε_k um V_n^{-1}, wenn man x um $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ mit hinreichend kleinen ε_k ändert. D. h. aber, für alle x aus einer kleinen Umgebung von x werden alle $f_n^1(X \mid x')$ zu $\sigma_n^1(x)$ gehören. Daraus folgt, daß $V(\Xi_n^\nu(x))$, $\nu = 1, 3, 4$ posi-

tiv ist. Da die Streifen $\sigma_n^1(x)$ etwas mit der Meßungenauigkeit der f_n^1 zu tun haben sollen, gibt es keine beliebig schmalen Streifen. Daraus kann man aber sogar schließen, daß die Umgebungen von den Punkten x, für die die $f_n^1(X \mid x)$ noch zu $\sigma_n^1(x)$ gehören, nicht beliebig klein werden können und daß es eine Zahl $\varsigma > 0$ gibt, für die immer $V(\Xi_n^\nu(x)) > \varsigma$, $\nu = 1, 3, 4$ ist. Im Falle $\nu = 2$ braucht man nur zu zeigen, daß für ein $\Lambda(f_n^2 \mid x)$ das Volumen $V(\Lambda)$ nicht Null wird. Anschaulich ist aber leicht einzusehen, daß es immer kleine Verschiebungen ε von x gibt, so daß die Punktschwärme $\Sigma_n(x)$ und $\Sigma_n(x + \varepsilon)$ zum selben f_n^2 führen, und daß alle ε ein kleines von Null verschiedenes Volumen erfüllen.

$V(\Xi_n^\nu(x))$ kann aber nicht unendlich werden. Denn dazu müßte $\Xi_n^\nu(x)$ nicht beschränkt sein, und aus einer nicht beschränkten Menge kann man sicher Punkte herausgreifen, die zu wesentlich verschiedenen Σ_n und damit zu wesentlich verschiedenen f_n^ν führen.

In den Kap. III und IV wird von der Funktion $v^\nu(x) = V(\Xi_n^\nu(x))$ die Eigenschaft benötigt, daß sie nicht pathologisch, d. h. daß sie mindestens meßbar ist. Dabei tritt nur $v^\nu(x)$ mit $\nu = 1, 3, 4$ auf, und es wird daher hier nur dieser Fall behandelt. Wenn, wie gezeigt wurde, die $\Xi_n^\nu(x)$ meßbare Mengen sind, so folgt nicht, daß $v^\nu(x)$ eine meßbare Funktion ist, wie sich durch folgendes Beispiel zeigen läßt: n(x) sei eine beliebige Funktion. Dann kann jedem x eine offene Menge O(x) vom Maße n(x) zugeordnet werden. Ist n(x) nicht meßbar, so ist auch V(O(x)) nicht meßbar. Wenn also $v^\nu(x)$ meßbar sein soll, so ist dies eine Forderung an die Streifen $\sigma_n^\nu(x)$. Wenn aber, wie es in den Kap. III und IV getan wird, durch die Streifen σ_n^ν die Meßungenauigkeit von f_n^ν wiedergegeben werden soll, so kann man aus physikalischen Gründen σ_n^ν so gewählt denken, daß $v^\nu(x)$ nicht nur meßbar, sondern sogar stetig ist.

Die dritte Behauptung läßt sich so formulieren:
Für $x' \in \Xi_n^\nu(x)$ ist

$$\left| V\left(\Xi_n^{\nu}(x)\right) - V\left(\Xi_n^{\nu}(x')\right)\right| \leq \beta \max_{x,x'} V\left(\Xi_n^{\nu}(x'')\right) \quad \text{(II, 83)}$$

mit einem Faktor $\beta \ll 1$. Und zwar müßte β so klein sein, daß in den späteren Anwendungen $V(\Xi_n^{\nu}(x))$ durch $V(\Xi_n^{\nu}(x'))$ ersetzt werden kann. In dieser Form konnte die Behauptung bisher nicht bewiesen werden. Man kann sie nur plausibel machen und zeigen, daß sie nicht zu Widersprüchen führt. Zunächst werde $\Xi_{\beta}^2(x)$ betrachtet. Die Volumina $V(\Lambda(f_1^2|x))$ hängen nicht von f_1^2 selbst, sondern nur von der Menge der Besetzungszahlen $N(k|x) = f_1^2(X_{(k)}|x)\, V_1$ ab; es gibt also sehr viele Λ, die exakt das gleiche Volumen haben. Geringe Änderungen der Besetzungszahlen ändern die Volumina der Λ ebenfalls wenig. $\Xi_1^2(x)$ setzt sich nun aus sehr vielen, sich z. T. überlappenden Λ zusammen. Geht man von x zu $x' \in \Xi_n^2(x)$ über, so gehört aber ein ganzer Teil der Λ, die $\Xi_1^2(x)$ aufbauen, auch noch zu $\Xi_1^2(x')$. Die anderen zu $\Xi_1^2(x')$ gehörenden Λ werden aber mit Verteilungsfunktionen gebildet, die sich nur wenig von den $f_1^2(X|x)$ unterscheiden. Denn, da $x' \in \Xi_1^2(x)$ ist, existiert ein $\hat{f}_1^2$ mit $\hat{f}_1^2(X|x) = \hat{f}_1^2(X|x')$, und daraus folgt, daß immer $f_1^2(X|x) = f_1^2(X|x') + 2\lambda$ gilt. Diese Argumente lassen die zweite Behauptung für Ξ_1^2 nicht unplausibel erscheinen. Es ist jetzt anzunehmen, daß auch für $n > 1$ $V(\Lambda(f_n^2|x))$ nicht sehr stark von f_n^2 abhängt, sondern daß auch nur die Menge der Besetzungszahlen maßgebend ist. Die andern Argumente würden dann für $n > 1$ ebenfalls zutreffen.

Die hier aufgestellte Behauptung verstößt auch nicht gegen das Ergebnis des BOLTZMANNSCHEN Abzählverfahrens, das besagt, daß der Bereich in einer Energieschale eines Gases, der zu ungefähr derselben Verteilungsfunktion $e^{-\beta\varepsilon(\bar{x})}$ führt, fast die ganze Energieschale einnimmt. Bei der Bestimmung der Funktion $e^{-\beta\varepsilon}$ werden nämlich so zahlreiche Näherungen gebraucht, daß diese viel ungenauer bestimmt ist als durch einen möglichen Streifen $\sigma(x)$. Die Ξ_1^2 bzw. die Ξ_n^2 werden also nur jeweils einen Teil des oben erwähnten maximalen Bereiches in der Energieschale einnehmen. Für Ξ_n^{ν}, $\nu = 1, 3, 4$ hängt die Richtigkeit der

aufgestellten Behauptung von der Wahl der σ_n^ν ab. Wenn die σ_n^ν so gewählt werden, daß sie sich so gut wie möglich an σ anpassen, so ist zu erwarten, daß $V(\Xi_n^2)$ und $V(\Xi_n^\nu)$, $\nu = 1, 3, 4$ nicht sehr stark voneinander abweichen, und die Behauptung wird auch für $V(\Xi_n^\nu)$, $\nu = 1, 3, 4$ gelten. Es werden daher die σ_n^ν im folgenden immer so gewählt, daß sie σ möglichst gut approximieren.

In manchen Formeln, in denen Integrale über Γ auftreten, ist es zweckmäßig, diese durch eine Integration über den Raum $\tilde{\Gamma}^\nu$ aller Funktionen $f_n^\nu(X)$, die gleich $f_n^\nu(X \mid x)$ sind, zu ersetzen. Für den Fall $\nu = 1, 3, 4$ ist nämlich jedes $f_n^\nu(X) \in \tilde{\Gamma}^\nu$ eineindeutig $\{x, \mathrm{Perm}(x)\}$ zugeordnet und man kann Maße von Γ in $\tilde{\Gamma}^\nu$ übertragen, indem man $\tilde{m}(\tilde{\Omega})$ mit $\tilde{\Omega} \subset \tilde{\Gamma}^\nu$ gleich $m(\Omega)$ setzt, wenn $\tilde{\Omega} \leftrightarrow \Omega$. Speziell für $m = V$ wird die Abkürzung

$$\int A(f_n^\nu)\, d\tilde{V}(f_n^\nu) = \int_{f_n^\nu} A(f_n^\nu) \qquad \text{(II, 84)}$$

benutzt. Für $\nu = 2$ kann man nicht allgemein jedes Integral über Γ in eins über $\tilde{\Gamma}^2$ umwandeln. Hat man ein Integral der Form $J = \int A(x)\, dx$ und hängt $A(x)$ für eine bestimmte Rasterwahl nur von $\Lambda(f_n^2 \mid x)$ ab, so gilt

$$J = \sum_k A(x_k)\, V(\Lambda(f_n^2 \mid x)). \qquad \text{(II, 85)}$$

Betrachtet man nun für festes Raster den Raum $\tilde{\Gamma}^2$ aller f_n^2, so enthält $\tilde{\Gamma}^2$ wegen $V(\Lambda) > 0$ nur abzählbar viele Elemente. Definiert man in $\tilde{\Gamma}^2$ ein Maß $\tilde{V}$ derart, daß, wenn

$$\tilde{\Omega} = \left\{ f_n^2 \mid f_n^2(\bar{x}) = f_n^2(\bar{x} \mid x_j),\ j = 1, \dots, r \le \infty \right\} \qquad \text{(II, 86)}$$

ist,

$$\tilde{V}(\tilde{\Omega}) = \sum_{j=1}^{r} V(\Lambda(f_n^2 \mid x)) \qquad \text{(II, 87)}$$

gilt, so kann man J schreiben als

$$J = \int_{\tilde{\Gamma}^2} A(f_n^2)\, d\tilde{V}(f_n^2). \qquad \text{(II, 88)}$$

Dafür soll wieder zur Abkürzung

$$J = \int_{f_n^2} A(f_n^2) \qquad \text{(II, 89)}$$

geschrieben werden.

6. Eigenschaften der f_n im μ_n - Raum

Fundamental für die Theorie der BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen ist eine Formel, die den Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeitsdichten und BOLTZMANNSCHEN Dichten wiedergibt. Ist h(X) eine im μ_n - Raum definierte Funktion, so sei

$$\overline{h}^{n\nu}(\bar{X}) = V_n^{-1} \int D_n^{\nu}(\bar{X}, \bar{X}') \, h(\bar{X}') \, d^n\bar{X}' \qquad \text{(II, 90)}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Es gilt dann für eine beliebige symmetrische Wahrscheinlichkeitsdichte F_N die Beziehung

$$L_n \overline{F}_n^{n\nu}(\bar{X}) = \int f_n^{\nu}(\bar{X} \mid x) \, F_N(x) \, dx \qquad \text{(II, 91)}$$

$$(\nu = 1, 2, 3, 4)$$

mit $L_n = N(N-1).....(N-n+1)$. Der Beweis ergibt sich durch Einsetzen der Entwicklung von f_n^{ν} nach D_n^{ν}. Damit nun $L_n F_n(X)$ ungefähr gleich $f_n^{\nu}(X \mid \mathring{x})$ werden kann, ist hinreichend, daß F_N bzgl. der f_n^{ν} (ungefähr) streuungsfrei ist und daß außerdem $\overline{F}_n^{n\nu}$ ungefähr gleich F_n ist. Sind nämlich beide Bedingungen erfüllt, so ergibt das Integral in (II, 91) f_n^{ν} und die linke Seite in (II, 91) $L_n F_n$. Ist umgekehrt $L_n F_n(X) = f_n^{1,2}(X \mid \mathring{x})$ für ein bestimmtes $\mathring{x}$, so folgt $F_n = \overline{F}_n^{n\,1,2} + \lambda$, da $f_n^{1,2}$ und $\overline{f_n^{1,2}}^{n\,1,2}$ ungefähr gleich sind, aber es folgt nicht die Streuungsfreiheit von F_N. Es wäre nicht ohne Interesse, zu untersuchen, für welche F_N die $L_n F_n$ gleich irgendwelchen f_n^{ν} sind. Bisher ist nur bekannt, daß die Streuungsfreiheit der F_N und die "Glattheit" der F_n hinreichend ist. Andererseits ist gezeigt, daß auch nicht alle F_N als F_n BOLTZMANNSCHE Dichten

haben, da ja F_n in bestimmter Weise "glatt" sein muß. Das Problem der Ersetzbarkeit von f_n durch F_n ist von großer praktischer Bedeutung, da meistens Aussagen über f_n gemacht werden sollen, wie z. B. in der BOLTZMANN - Gleichung, aber leichter solche über F_n gewonnen werden können. Wie schon in §1 bemerkt, wird aber der Unterschied zwischen F_n und f_n häufig nicht beachtet.

In den vorangegangenen Paragraphen waren bereits Entwicklungen für die f_n', f_n'' und speziell für f_n^ν ($\nu = 1, 2, 3, 4$) angegeben worden. Es lassen sich nun noch zwei weitere angeben, von denen die eine hier behandelt werden soll. Die andere Darstellung von f_n^ν als Reihe ergibt sich als Anwendung der Entwicklungsformeln für makroskopische Observablen, wie sie in Kap. III, §1 abgeleitet werden. Denn nach der dort gegebenen Definition sind die f_n^ν makroskopische Observablen. Zunächst werde f_n^2 betrachtet. Da $V(\Lambda(f_n^2 \mid x)) > 0$ ist für alle $x \in \Gamma'$, gibt es nur abzählbar viele $\Lambda(f_n^2 \mid x)$, die als $\Lambda_n^2(j)$ bezeichnet werden sollen. Für alle $x \in \Lambda_n^2(j)$ erhält man eine bestimmte Funktion $f_n^2(X \mid x)$, die mit $f_n^2(X \mid j)$ bezeichnet werden soll. Man hat also zunächst eine Entwicklung der Form

$$f_n^2(\bar{X}(x) = \sum_j f_n^2(\bar{X}(j)\, \zeta\{\Lambda_n^2(j)\}(x). \quad \text{(II, 92)}$$

$f_n^2(X \mid j)$ ist aber nach (II, 28) gleich

$$\sum_k f_n^1(\bar{X}_{(k)} \mid x_{(j)})\, D_n^1(\bar{X}_{(k)} - \bar{X}),$$

und mit $f_n^1(X_{(k)} \mid x_{(j)}) = f_n(k, j)$ hat man also

$$f_n^2(\bar{X}(x) = \sum_{j,k} f_n(k, j)\, D_n^1(\bar{X}_{(k)} - \bar{X})\, \zeta\{\Lambda_n^2(j)\}(x). \quad \text{(II, 93)}$$

Dieselbe Entwicklung gilt aber auch näherungsweise für die f_n^ν mit $\nu = 1, 3, 4$.

Die Bedeutung solcher Entwicklungen liegt vor allem darin, daß Bestimmungsgleichungen für die f_n, wie z. B. die

BOLTZMANN - Gleichung für f_1 oft mit ihrer Hilfe näherungsweise gelöst werden können. Es ist sogar so, daß alle Lösungen z. B. der BOLTZMANN - Gleichung, die sich nicht in der angegebenen Weise entwickeln lassen, physikalisch sinnlos sind, denn sie stellen gar keine möglichen f_n dar. Für praktische Zwecke sind natürlich oft andere Orthogonalsysteme als die der $D_n^1(X_{(k)} - X)$ und der $C\left\{\Lambda_n^2(j)\right\}(x)$ zweckmäßiger. (Vgl. z. B. das GRADSCHE Verfahren [3])

Aus den Überlegungen der vorangegangenen Paragraphen kann man entnehmen, daß die Abhängigkeit der $f_n(X \mid x)$ von X in gewisser Weise mit der Abhängigkeit von x gekoppelt ist. Präziser ausgedrückt ergibt sich folgendes Problem: Unterwirft man x einer Transformation T, so geht f_n unter T in eine andere Funktion g_n über, $f_n(X \mid Tx) = g_n(X \mid x)$, und man kann jetzt diejenigen Transformationen T suchen, zu denen es eine zweite auf X wirkende Transformation T' gibt, so daß $f_n(X \mid Tx) = f_n(T'X \mid x)$ ist. Über eine allgemeine Lösung dieser Frage ist nichts bekannt, und es sollen daher nur zwei für die späteren Anwendungen wichtige Spezialfälle behandelt werden. Es sei zunächst $T(x_1, \ldots, x_N) = (x_1 + e, \ldots, x_N + e)$. Dann ist $X^{\varrho}(Tx) = X^{\varrho}(x) + (e, \ldots, e)$. Ferner hängen in den Entwicklungen von f_n^{ν}, $\nu = 1, 3, 4$ die Funktionen D_n^{ν} nur von den Differenzen $X - X^{\varrho}(x)$ ab, so daß also $f_n^{\nu}(X \mid Tx) = f_n^{\nu}(T'X \mid x)$ ist mit $T'X = X - (e, \ldots, e)$. Dieses Resultat kann noch verschärft werden. Die Funktionen $D_n^{\nu}(X - X^{\varrho}(x))$ ($\nu = 1, 3, 4$) sind nämlich nur von Null verschieden, wenn mit $X^{\varrho}(x) = (p_{r_1}, q_{r_1}, \ldots, p_{r_n}, q_{r_n})$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
-\beta_\nu \delta_1 &\leq P_1^i - p_{r_1}^i < \beta_\nu \delta_1 \\
-\beta_\nu \eta_1 &\leq Q_1^i - q_{r_1}^i < \beta_\nu \eta_1 \\
&\cdots \\
-\beta_\nu \delta_n &\leq P_n^i - P_{n-1}^i - p_{r_n}^i + p_{r_{n-1}}^i < \beta_\nu \delta_n \\
-\beta_\nu \eta_n &\leq Q_n^i - Q_{n-1}^i - q_{r_n}^i + q_{r_{n-1}}^i < \beta_\nu \eta_n
\end{aligned}
\qquad \text{(II, 94)}
$$

gelten, wobei $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 2$ und $\beta_4 = 2 + \beta$ mit einer Zahl $\beta << 1$ ist. Setzt man statt q_r^j in (II, 94) $q_r^j + p_r^j \cdot \sigma$ ein, so ist diese Menge der X für kleine σ "ungefähr" gleich der Menge der X, die man erhält, wenn man statt Q_s^j die Größen $Q_s^j - P_s^j \cdot \sigma$ einsetzt, denn P_1^j ist ungefähr gleich p_{r_1} usw. Daraus folgt aber, daß auch

$$f_n^\nu(P_1, Q_1, \cdots, P_n, Q_n \mid p_1, q_1 + p_1\sigma, \cdots, p_N, q_N + p_N\sigma) = \tag{II, 95}$$
$$= f_n^\nu(P_1, Q_1 - p_1\sigma, \cdots, P_n, Q_n - p_n\sigma \mid p_1, q_1, \cdots, p_N, q_N)$$

ist. Mit denselben Argumenten läßt sich auch zeigen, daß (II, 95) gilt, wenn statt $q_r^j + p_r^j \sigma$ der Ausdruck $q_r^j + H^j(p_r)\ \sigma$ eingesetzt wird, wobei H^j nicht stärker als p_r variieren soll. Ebenso kann natürlich auch das Analogon zu (II, 95) bewiesen werden, wenn P und Q und p und q vertauscht werden. Für f_n^4 erhält man aus (II, 95) die für spätere Anwendungen wichtigen Formeln:

$$\sum_{j,r}^{3,N} p_r^j \frac{\partial f_n^4}{\partial q_r^j} = -\sum_{j,s}^{3,n} P_s^j \frac{\partial f_n^4}{\partial Q_s^j} \tag{II, 96}$$

und

$$\sum_{j,r}^{3,N} K^j(q_r) \frac{\partial f_n^4}{\partial P_r^j} = -\sum_{j,s}^{3,n} K^j(Q_s) \frac{\partial f_n^4}{\partial P_s^j}\ , \tag{II, 97}$$

wobei $K^j(q_r)$ ebenfalls nicht stärker als q_r variieren soll. Definiert man eine andere Transformation T von $x = (p_1, q_1, \ldots, p_N, q_N) = (p, q)$ durch $T(p, q) = (-p, q)$ und analog T von $X = (P_1, Q_1, \ldots, P_n, Q_n) = (P, Q)$ durch $T(P, Q) = (-P, Q)$, so ist $f_n^2(TX \mid Tx) = f_n^1(X \mid x)$ bis auf solche Stellen X, wo ein Punkt des Punktschwarmes $\sum_n(x)$ bzgl. seiner Impulskoordinaten auf dem Rande von $\Delta_n^1(X)$

liegt. Bis auf die Unstetigkeitsstellen gilt also $f_n^1(TX \mid Tx) = f_n^1(X \mid x)$, und $f_n^1(TX \mid Tx)$ und $f_n^1(X \mid x)$ unterscheiden sich nur durch ihr Grenzwertverhalten an den Unstetigkeitsstellen. Wenn man nun $\sigma_n^1(Tx)$ so wählt, daß es alle $f_n^1(TX \mid x')$ für $x' \in \Xi_n^1(x)$ enthält, so ist $T\,\Xi_n^1(x) = \Xi_n^1(Tx)$. Wenn σ_n^1 die Meßungenauigkeit von f_n^1 darstellt, so bedeutet diese Wahl von $\sigma_n^1(Tx)$ physikalisch, daß man $f_n^1(X \mid x)$ und $f_n^1(X \mid Tx)$ gleich gut messen kann. Diese Voraussetzung wird in Kap. IV, §1 gemacht.

7. Die f_n für allgemeine mechanische Systeme

Bisher war die Theorie der BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen nur für Systeme entwickelt worden, die aus Massenpunkten zusammengesetzt sind, zu erweitern ist sie also auf die Fälle, wo die Konstituenten des Systems kompliziertere mechanische Gebilde darstellen, wo andere Verteilungsfunktionen als die f_n eine Rolle spielen, und schließlich ist der Fall der reagierenden Systeme zu betrachten.

Die jetzt folgenden Überlegungen sind analog zu denen des §2. Jedes mechanische System ist aufgebaut aus Massenpunkten, starren Geradenstücken und sonstigen starren Kontinua, als den nicht reduzierbaren Bestandteilen. Der Zustand der Massenpunkte wird durch 6, der der starren Geradenstücke durch 10 und der der übrigen starren Kontinua durch 12 Koordinaten beschrieben. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also nicht größer als $3\,N_1 + 5\,N_2 + 6\,N_3$, wenn die N_i die Anzahlen der entsprechenden Konstituenten sind. Andererseits kann man in Gedanken jedes System in irgendwelche Teilsysteme zerlegen, bzw. sich das System aus ihnen aufgebaut denken.

Es soll jetzt eine Verallgemeinerung des μ_n - Raumes eingeführt werden. Dazu geht man vom Γ - Raum eines gegebenen Systems aus, wobei Γ die Menge aller x sein soll und x ein K - tupel von irgendwelchen fest gewählten kanonischen Koordinaten. Das System sei in Gedanken irgendwie in Teilsysteme eingeteilt, und es wird eine Teilmenge dieser Teilsysteme betrachtet, die alle gleichartige und auf

dasselbe Koordinatensystem bezogene Bestimmungsvektoren z_{r_ρ} mit $\rho = 1, \ldots\ldots, N_A$ und ein sie eindeutig als zu dieser Teilmenge gehörig kennzeichnendes Merkmal A haben. Von den z_{r_ρ} wird weiter vorausgesetzt, daß sie für alle ρ denselben Wertebereich haben. Die Teilsysteme brauchen dabei aber durch den Vektor z_{r_ρ} nicht vollständig beschrieben zu werden.

Als den zu Γ gehörigen $\mu_n(A)$ - Raum bezeichnet man wie in §2 die Menge aller $Z = (Z_1, \ldots\ldots, Z_n)$, wobei die Z_s denselben Wertebereich wie die z_r haben sollen. Ferner wird wie oben der Punktschwarm $\Sigma_n(z_{r_1}, \ldots, z_{r_{N_A}}) \equiv$ $\equiv \Sigma_n(A \mid x)$ eingeführt, und ebenso die Mengen $\Delta'_n(A;Z)$ und die Funktionen $f'_n(A;Z \mid x)$. Um Beziehungen zwischen Bestimmungsstücken von verschiedenen Teilsystemen mit verschiedenen Merkmalen A_r zu beschreiben, führt man einen $\mu\left(\begin{smallmatrix} A_1, & A_2, & \ldots\ldots, & A_L \\ n_1, & n_2, & \ldots\ldots, & n_L \end{smallmatrix}\right)$ - Raum ein, wobei

$$\mu\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \ldots, & A_L \\ n_1, & \ldots, & n_L \end{smallmatrix}\right) = \mu_{n_1}(A_1) \times \cdots \times \mu_{n_L}(A_L) \qquad \text{(II, 98)}$$

sein soll. (Abgekürzt $\mu\left(\begin{smallmatrix} A \\ n \end{smallmatrix}\right)$). Als Punktschwarm in $\mu\left(\begin{smallmatrix} A \\ n \end{smallmatrix}\right)$ hat man dann

$$\Sigma\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \ldots, & A_L \\ n_1, & \ldots, & n_L \end{smallmatrix} \mid x\right) = \Sigma_{n_1}(A_1 \mid x) \times \cdots \times \Sigma_{n_L}(A_L), \qquad \text{(II, 99)}$$

und die entsprechenden Mengen bzw. Funktionen werden mit

$$\Delta'\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \ldots, & A_L \\ n_1, & \ldots, & n_L \end{smallmatrix}; Z_1, \ldots, Z_L\right) \text{ bzw. } f'\left(\begin{smallmatrix} A_1, & \ldots, & A_L \\ n_1, & \ldots, & n_L \end{smallmatrix}; Z_1, \ldots, Z_L \mid x\right)$$

bezeichnet und sinngemäß abgekürzt mit $\Sigma\left(\begin{smallmatrix} A \\ n \end{smallmatrix} \mid x\right)$, $\Delta'\left(\begin{smallmatrix} A \\ n \end{smallmatrix}; Z\right)$ und $f'\left(\begin{smallmatrix} A \\ n \end{smallmatrix}; Z \mid x\right)$. Die Integraldarstellung von

$f\left(\begin{smallmatrix}A\\n\end{smallmatrix}; Z \mid x\right)$ lautet dann ganz so wie in § 2:

$$f'\left(\begin{smallmatrix}A\\n\end{smallmatrix}; Z \mid x\right) = V^{-1}\left(\Delta'\left(\begin{smallmatrix}A\\n\end{smallmatrix}; Z\right)\right) \int_{\Delta'\left(\begin{smallmatrix}A\\n\end{smallmatrix}; Z\right)} \sum_{\gamma \in \Sigma\left(\begin{smallmatrix}A\\n\end{smallmatrix} \mid x\right)} \delta(\Upsilon - \gamma)\, d\Upsilon, \quad \text{(II, 100)}$$

wobei V wieder das BORELSCHE Maß sein soll.

Für reagierende Systeme lassen sich alle Definitionen übertragen, wenn man statt von $\Gamma = \bigcup \Gamma_\rho$ von Γ_ρ ausgeht. Geht man nicht von Teilmengen von Teilsystemen aus und sucht für diese gemeinsame, sie eindeutig charakterisierende Merkmale, sondern umgekehrt von den Merkmalen, so lassen sich noch einige Folgerungen ziehen. Hat man eine Einteilung in Teilsysteme des gegebenen Systems und irgendwelche Merkmale, so lassen sich die Teilsysteme nach Merkmalen klassifizieren. Mit zwei Merkmalen A und B ist auch "A und B" $\equiv$ $\equiv$ "A $\wedge$ B" und "A oder B" $\equiv$ "A $\vee$ B" ein Merkmal. Die Klassen von Teilsystemen bilden einen endlichen Mengenkörper, d. h. einen Verband und ebenso die Mengen der Merkmale. Beide sind isomorph. Um für möglichst viele Merkmale die entsprechenden Verteilungsfunktionen definieren zu können, muß man also von einem Γ - Raum ausgehen, der entsprechend vergleichbare Koordinaten enthält.

Im Anschluß an diese allgemeinen Betrachtungen soll nun versucht werden, die Funktionen f so zu spezialisieren, daß sie für die makroskopische Beschreibung allgemeiner Systeme (nicht nur solcher aus gleichen Massenpunkten) brauchbar sind. Dies kann natürlich wieder nur im Rahmen von Definitionen geschehen, die aber selbst durch Plausibilitätsargumente einleuchtend gemacht werden sollen. Präzise ausgedrückt ergeben sich folgende Probleme:
1. Welche Systeme sind geeignete Modelle? 2. Welche Teilsysteme, 3. welche Koordinaten von Teilsystemen, 4. welche Merkmale an Teilsystemen und 5. welche Mengen Δ ergeben die "richtigen" f?

Nach der Quantenmechanik müssen alle Observablen invariant

gegenüber Permutationen gleicher Teilchen sein. Die Teilchen selbst können zusammengesetzte Gebilde sein. Aber dann müssen wieder alle Observablen invariant bei Permutationen gleicher "Unterteilchen" sein. Auf die Mechanik übertragen heißt das, daß Systeme, die für den angegebenen Zweck als Modelle dienen sollen, eine bzgl. Permutation gleicher, nicht zerlegbarer Teile, d. h. bzgl. Permutation gleicher Massenpunkte und gleicher starrer Kontinua invariante HAMILTON - Funktion haben müssen. Massenpunkte und starre Kontinua (und deren Grenzfälle, wie z. B. starre Hanteln) sind also die "Elementarteilchen" der klassischen Mechanik. Hat man in Gedanken eine andere Zerlegung eines gegebenen Systems in Teilsysteme gemacht, so sind entweder die Teilchen der Teilsysteme als zu einem bestimmten Teilsystem gehörig physikalisch ausgezeichnet, dann ist aber die HAMILTON - Funktion nicht mehr symmetrisch, oder aber, wenn sie symmetrisch ist, ist die Aufteilung in Teilsysteme willkürlich und sicherlich ohne Relevanz für das makroskopische Verhalten. Nur die Aufteilung in Massenpunkte und starre Kontinua, also in "Elementarteilchen" ist naturgegeben.

Um alle Teilchen miteinander vergleichen zu können, ist es notwendig, allen gemeinsame Koordinaten zu finden. Diese sind Schwerpunkt und Schwerpunktsimpuls. Darüber hinaus sollen die drei Winkelkoordinaten der starren Kontinua so gewählt werden, daß zwei ausreichen, um starre Hanteln u. ä. zu beschreiben. Außerdem seien die entsprechenden Koordinaten immer auf dasselbe Koordinatensystem bezogen. Als Koordinaten hat man also

$$p_r^j,\ q_r^j \quad \text{oder} \quad p_k^j,\ \pi_k^1,\ \pi_k^2,\ q_k^j,\ \varphi_k^1,\ \varphi_k^2 \quad \text{oder} \tag{II, 101}$$

$$p_m^j,\ \pi_m^j,\ q_m^j,\ \varphi_m^j \qquad \text{mit } j = 1, 2, 3.$$

(Abgek. u_r oder v_k, χ_k oder w_m, Ψ_m oder unbest. x_r, x_k, x_m.) Als Merkmale, die physikalisch wirksam werden können, treten alle nicht kontingenten Bestimmungsstücke der Teilchen auf, wie Massen, Trägheitsmomente, Ladungen, Dipolmo-

mente usw., die in die HAMILTON - Funktion des Systems eingehen. Im Sinne des in der Einleitung beschriebenen verallgemeinerten HAMILTON - Formalismus können jedoch auch eigentlich kontingente Bestimmungsstücke der Teilchen als Merkmale auftreten, nämlich solche, die nur quantenmechanisch bestimmt werden können, aber in die Übergangswahrscheinlichkeit P eingehen, z. B. die innere Energie der Teilchen, der Spin usw. Durch gewisse Merkmale werden die Teilchen eines Systems eindeutig als zu einer bestimmten Sorte gehörig gekennzeichnet. Es ist anschaulich klar, daß verschiedene solcher Merkmale nicht zugleich wirklich sein können, und ihre Konjunktion ist also $\varnothing$, d. h. sie haben Atomcharakter. Alle anderen sind dann Disjunktionen von Atommerkmalen. Die HAMILTON - Funktionen realer Systeme werden dann also symmetrisch in den Koordinaten jeder Teilchensorte sein, weil andernfalls noch ein physikalischer Unterschied zwischen ihnen bestehen würde. Gegeben sei jetzt ein System, das M verschiedene Teilchensorten mit den Merkmalen A_ρ, $\rho = 1,\ldots, M$ habe, und betrachtet werden die $\mu_n(A_\rho)$ - Räume. Sie bestehen aus allen n - tupeln $(X_1,\ldots, X_n) = X$, wobei $X_k = U_k$ oder $X_k = (V_k, \chi_k)$ oder $X_k = (W_k, \Psi_k)$ ist mit den entsprechenden Wertebereichen wie u_k usw. Es liegt nahe, die Mengen $\Delta'_n(A ; X)$ genauso wie in §4, also nach Formel (II, 20) zu wählen, wobei nur $j = 1,\ldots., 6$ oder $j = 1,\ldots, 10$ oder $j = 1,\ldots., 12$ ist. Diese Mengen werden wieder mit Δ^1_n, Δ^2_n bezeichnet und die entsprechenden Funktionen mit f^1_n und f^2_n. Da die A_ρ die Teilchen eindeutig festlegen, ist auch klar, was unter X zu verstehen ist, nämlich enthält A_ρ das Merkmal Massenpunkt, so ist $X_k = U_k$, enthält A_ρ nur das Merkmal starres Geradenstück, so ist $X_k = (V_k, \chi_k)$ usw. Hat man z. B. das Merkmal $A_r \cup A_s$ und enthält A_r das Merkmal Massenpunkt und A_s das Merkmal starre Kugel, so ist unter X natürlich nur der Vektor mit $X_k = U_k = W_k$ zu verstehen, da nur u und w vergleichbare Bestimmungsstücke mit demselben Wertebereich sind.

Nach diesen Vorbereitungen soll nun der Begriff des makroskopischen Systems für den Fall $\Gamma = \{ x \}$ und $\Gamma = \{(x,\rho)\}$ definiert werden. Erfahrungsgemäß ist ein System makrosko-

pisch, wenn die Forderungen a) - f) bzgl. aller Teilchen zusammen erfüllt sind. Das legt folgende Definition nahe:

Ein System mit einem Γ - Raum $\Gamma = \{ x \}$ heißt makrosskopisch, wenn für das ungenaueste Merkmal $S = \cup A$ die Forderungen a) - f) für $f_n^{1,2}(S; X \mid x)$ gelten. Da durch die oben eingeführten $\Delta_n^{1,2}(S; X)$ a), d),e) und f) erfüllt werden, bedeutet diese Forderung, daß b) und c) für $f_n^{1,2}(S; X \mid x)$ richtig sein sollen.

Ein System mit $\Gamma = \cup \Gamma_\rho$ heißt makroskopisch, wenn es Zahlen ρ gibt, so daß für die ungenauesten Merkmale $S(\rho)$ die Funktionen $f_n^{1,2}(S(\rho); X \mid x, \rho)$ die Forderungen a) - f) erfüllen. a), d), e) und f) lassen sich dabei wieder durch die obige Wahl der $\Delta_n^{1,2}(S(\rho); X)$ erfüllen. Die anschauliche Diskussion der Forderungen in §4 läßt sich fast wörtlich auf den hier betrachteten Fall anwenden. Enthält das System nur Massenpunkte, so ist $f_n(S; X \mid x) = f_n(X \mid x)$.

Auch die Betrachtungen des §5 lassen sich ganz analog für die $f_n^{1,2}(A; X \mid x)$ durchführen. Es ist bei Anwendungen nur zu beachten, daß die Mengen Λ, Ξ_n^ν und Θ_ρ dann sicher nicht mehr beschränkt sind, wenn sie für ein Merkmal $A \neq S$ gebildet werden. Denn die Dichtefunktionen $f_n(A; X \mid x)$ hängen dann nicht von allen Komponenten von x ab, und die Konstanzbereiche sind somit Zylindermengen in Γ.

Kap. III Makroskopische Observablen und Gesamtheiten

1. Definition der makroskopischen Observablen und Gesamtheiten

In diesem und in den folgenden Paragraphen sollen ausschließlich makroskopische mechanische Systeme betrachtet werden, d. h. entweder solche Systeme, die aus gleichen Massenpunkten bestehen, eine symmetrische HAMILTON - Funktion haben und für die f_n die Forderungen a) - f) erfüllen, oder kompliziertere Systeme mit entsprechend symmetrischer HAMILTON - Funktion, für die die $f_n(S; X \mid x)$ die Forderungen a) - f) erfüllen. Durch die in Kap. II, §4 angegebenen Raster lassen sich aber die Forderungen a), d), e) und f) erfüllen, so daß als eigentliche Bedingung nur noch b) und c) übrig bleiben.

Es ist nun nicht zu beweisen, daß eine bestimmte Klasse von Observablen wirklich die makroskopischen Observablen sind, sondern diese müssen durch eine Definition (bzw. Annahme) eingeführt werden, an deren Konsequenzen sich erweisen muß, ob die Definition sinnvoll ist oder nicht. Jedoch lassen einige heuristische Betrachtungen die im folgenden gegebene Definition als sehr plausibel erscheinen. Anschaulich ist klar, daß makroskopische Meßapparate keine genauen Resultate liefern können. Eine makroskopische Observable kann und muß daher nur als ein Streifen in $\Gamma \times R$ definiert werden. Wenn bekannt wäre, welche Punkte in Γ als makroskopisch nicht unterscheidbar anzusehen sind, ergäbe sich als naheliegende Definition, daß makroskopische Observablen solche sind, die in makroskopisch nicht unterscheidbaren Punkten "ungefähr" dieselben Werte haben. In Kap. II, §4 war gezeigt worden, daß die Funktionen f_n^ν, $\nu = 1, 3, 4$ eineindeutig den Punkten x und Perm (x) zugeordnet sind. Der Zustand eines Systems kann daher auch durch die Angabe einer Funktion f_n^ν, $\nu = 1, 3, 4$ bestimmt werden. Es ist eine naheliegende Verallgemeinerung, als groben oder makroskopischen Zustand eine Funktion f_n^ν, $\nu = 1, 3, 4$ mit einer gewissen Ungenauigkeit, d. h. einen Streifen σ_n^ν zu definieren. Dabei kann man aus phy-

sikalischen Gründen annehmen, daß σ_n^ν die in Kap. II, §5 vorausgesetzten Eigenschaften hat. Als makroskopisch nicht unterscheidbare Punkte x sind aber die anzusehen, die denselben Makrozustand realisieren können, d. h. wenn der Makrozustand durch $\sigma_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 3, 4$ gegeben ist, so sind die $x' \in \Xi_n^\nu(x)$ makroskopisch nicht unterscheidbar. In den folgenden Überlegungen werden immer nur die $\Xi_n^\nu(x)$, $\nu = 1, 3, 4$ gebraucht. Da sie für verschiedene ν sowieso gleich sind, wird dafür in diesem Kapitel und in Kapitel IV kurz $\Xi_n(x)$ geschrieben. Da jeder ungenauen Messung, also auch den makroskopischen nicht nur eine Meßungenauigkeit, sondern auch noch (vgl. Kap I) eine gewisse Unbstimmtheit der Genauigkeitsgrenzen anhaftet, ist es nicht sinnvoll, die Grenzen der Mengen als physikalisch relevant anzusehen. Wenn daher im folgenden trotzdem die Ξ_n als bestimmte Mengen angesehen werden, so geschieht dies nur aus rechentechnischen Gründen. (Es ist auch zu vermuten, daß die folgenden Überlegungen sogar noch für Ξ_n^2 genauso gültig wären, wie für Ξ_n.)

Da alle Einteilungen des Γ - Raumes, also auch die in die Ξ_n, mit wachsendem n feiner werden, muß n "möglichst" groß gewählt werden, da man, wenn n zu klein gewählt würde, auch makroskopisch noch genauer messen könnte. Da anzunehmen ist, daß die Bedingungen b) und c) nicht von einem ganz bestimmten n an nicht mehr erfüllt sind, sondern da zu erwarten ist, daß ähnlich wie bei der Meßungenauigkeit eine Entscheidung zwischen Nicht - Erfülltsein und Erfülltsein für manche n nicht möglich ist, kann man kein maximales n angeben, sondern nur sagen, daß n für bestimmte Zwecke "möglichst" groß sein soll. Ein solches n sei also gegeben. Man bildet nun eine Funktion $G(x, x') = V^{-1}(\Xi_n(x))\, C\{\Xi_n(x)\}(x')$ und mit ihrer Hilfe den Operator G:

$$G A(x) = \int G(x, x') A(x') \, dx' \qquad \text{(III, 1)}$$

Von der Funktion $C(x', x) = C\{\Xi_n(x')\}(x)$ kann man zeigen, daß sie symmetrisch ist. Denn

$$C(x', x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma', \ x \in \Xi_n(x') \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(III, 2)}$$

Daraus folgt

$$C(x', x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma', \ x' \text{ so, daß } \Xi_n(x') \ni x \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \text{(III, 3)}$$

Wegen der Eigenschaft, daß mit $x \in \Xi_n(x')$ auch $x' \in \in \Xi_n(x)$ ist, kann man schreiben:

$$C(x', x) = \begin{cases} 1, & x \in \Gamma', \ x' \in \Xi_n(x) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{(III, 4)}$$

was aber per Definition gleich $C\{\Xi_n(x)\}(x')$ ist. Daraus folgt aber auch die Meßbarkeit bzgl. x . In Kap. II, §5 war die Existenz einer Zahl $\zeta > 0$ mit $V(\Xi_n(x)) > \zeta$ gezeigt worden. Ferner war σ_n^ν, $\nu = 1, 3, 4$ so gewählt worden, daß $V(\Xi_n(x))$ bzgl. x stetig ist. Daher ist also $G(x, x')$ eine beschränkte meßbare Funktion, und der Operator G ist ein sinnvoller Operator.

G angewandt auf alle möglichen, in endlichen Bereichen beschränkten BAIRESCHEN Funktionen A(x) gibt Funktionen M(x). Zu jedem M(x) bilde man nun alle möglichen bedingten Erwartungen $E\{M \mid \mathcal{L}(n, \nu, \Omega)\}(x)$ und $E\{M \mid \mathcal{L}(f_n)\}(x)$, wodurch ein Streifen $\varkappa_1(M)$ induziert wird. Ferner bildet man zu M(x) alle möglichen Funktionen g derart, daß mit $x' \in \Xi_n(x)$ die g(x) den Wert M(x') haben soll. Durch diese Funktionen g ist ein Streifen $\varkappa_2(M)$ induziert, und beide Streifen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ergeben einen Streifen $\varkappa(M)$ Solche Funktionen M sollen makroskopische Observablen heißen. Bisher enthalten natürlich diese Definitionen noch keine Physik. Erst durch eine zusätzliche Annahme werden sie auf die Erfahrung bezogen. Es wird daher die Annahme II gemacht. Die makroskopischen Observablen M sind die Ob-

servablen, die mit makroskopischen Meßapparaten gemessen werden können, und solche Messungen sind mit einer Ungenauigkeit behaftet, die nicht kleiner ist als die durch den Streifen $\varkappa$ um M gegebene. Dabei ist nun wieder der anschauliche Begriff eines Meßapparates zur makroskopischen Messung einer Größe wie in Kap. II, §3 ungefähr bestimmt: Ein makroskopischer Meßapparat ist ein solcher, bei dem das Verhältnis der Teilchenzahlen des Meßapparates und des zu messenden Systems ungefähr von der Größenordnung eins ist.

Für den Operator G gilt bzgl. der makroskopischen Observablen M(x) folgender Satz: Zu dem Streifen um M(x) gehört auch GM(x), d. h. es ist

$$G\,M(x) = M(x) + \lambda(M). \qquad \text{(III, 5)}$$

Denn mit $x' \in \Xi_n(x)$ existiert ein $M'(x)$ in $\varkappa(M)$, für das $M'(x) = M(x')$ ist, so daß natürlich der Mittelwert der M' auch in $\varkappa(M)$ liegt. Für die Potenzen von G gilt:

$$G^r M(x) = M(x) + \tilde{\lambda}(M) \qquad \text{(III, 6)}$$

mit $\tilde{\lambda} = \sum_{\rho=0}^{r-1} G^\rho \lambda$. Ob $\tilde{\lambda}$ in dem Streifen $\varkappa(M)$ liegt oder nicht, hängt von r und λ ab. Da anzunehmen ist, daß mit $M + \lambda(M)$ auch $M + G^\rho \cdot \lambda(M)$ eine Funktion aus dem Streifen $\varkappa(M)$ ist, hat also $\tilde{\lambda}$ im ungünstigsten Falle einen r- fachen größeren Wert als λ. Da aber, wie in Kap. I diskutiert, eine Meßungenauigkeit selbst nicht als scharfe Grenze definierbar ist, kann man annehmen, daß auch G^2M und M experimentell nicht unterschieden werden können.

Anhand der in Kap. I angestellten Erörterungen über ungenaue Messungen kann man nun auch diskutieren, welche Rückschlüsse auf den Zustand x nach einer makroskopischen Messung möglich sind. Und zwar sind nach Kap. I die Mengen $\{x \mid \beta_1 \leq M(x) \leq \beta_2\}$ zu untersuchen. Nach Annahme II ist die durch β_1, β_2 gegebene Ungenauigkeit nicht kleiner als die durch $\varkappa(M)$ gegebene. Daher kann man aus einer makroskopischen Messung höchstens schließen, daß x

in einem $\Xi_n(x')$ liegt.

Als spezielle Klassen von makroskopischen Observablen seien nur zwei besonders wichtige erwähnt.

Von großer praktischer Bedeutung sind Observable der Form

$$M(x) = \int A(x) f_n(\bar{X} \mid x) d^n\bar{X} . \qquad \text{(III, 7)}$$

Sie spielen für n = 1 in der kinetischen Gastheorie eine große Rolle. Wenn A(X) eine "hinreichend langsam" veränderliche Funktion ist, so ist (vgl. (II, 14) und (II, 15)) M(x) eine Summenfunktion mit Summanden $A(X^{\rho}(x))$. Speziell sind per Definition die $f_n(X \mid x)$ makroskopische Observable.

Mehr von theoretischer Bedeutung ist eine andere Klasse von Observablen, nämlich die Klasse der makroskopischen Eigenschaften. Normalerweise bezeichnet man in der Mechanik als eine Eigenschaft eine spezielle Observable, der eine charakteristische Funktion zugeordnet ist. Der Eigenschaft z. B., daß eine Observable A Werte zwischen α und β hat, entspricht die Funktion: $C\{\ x' \mid \alpha \leq A(x') \leq \beta\}(x)$. Von einer Größe, die man sinnvollerweise als makroskopische Eigenschaft bezeichnen könnte, kann man jedoch nicht erwarten, daß sie exakt eine charakteristische Funktion ist. Anschaulich führt man die makroskopischen Eigenschaften so ein, daß ihnen die Aussage entspricht, eine makroskopische Observable M hat (mit entsprechender Unsicherheit) Werte zwischen zwei Zahlen m_1 und m_2, aber M hat keine Werte außerhalb $[m_1'', m_2'']$. Man erhält also zunächst zwei Mengen Z und Z'' mit $Z = \{ x \mid m_1 \leq M(x) \leq m_2 \}$ und $Z'' = \{ x \mid m_1'' \leq M(x) \leq m_2'' \}$. Aber keine der charakteristischen Funktionen $C\{ Z \}$ oder $C\{ Z'' \}$ kann man sinnvollerweise als den mathematischen Ausdruck für die makroskopische Eigenschaft ansehen. Denn erstens sind beide Funktionen keine makroskopischen Observablen, und zweitens wird Z weniger Zustände x enthalten als die, die tatsächlich die Eigenschaft verifizieren, und ebenso Z'' zuviel. Es liegt daher nahe, statt von Z oder Z'' von $Z' = \{ x \mid \frac{1}{2}(m_1 + m_1'') \leq M(x) \leq \frac{1}{2}(m_2 + m_2'') \}$ bzw. von

$C\{Z'\}$ auszugehen. Damit bildet man die Funktion K mit

$$K(Z|x) = G\,C\{Z'\}(x). \qquad \text{(III, 8)}$$

Jede (meßbare) Funktion K' aus dem durch K definierten Streifen soll dann eine makroskopische Eigenschaft heißen und anschaulich bedeuten, daß M Werte zwischen m_1 und m_2 annimmt. Die K sind also charakteristische Funktionen auf Z mit "verschmierten" Rändern. Die schärfsten makroskopischen Eigenschaften sind Funktionen, füe die $Z = \Xi_n(x')$ ist. Man schreibt für diese Eigenschaften K(x', x). Für die Funktionen $C(x', x) = C\{\Xi_n(x')\}$ gilt $C(x', x) = C(x, x')$. Da aber K(x', x) ungefähr gleich C(x', x) ist, denn zu K(x', x) kommt gerade noch ein Rand hinzu, hat man also näherungsweise auch K(x', x) = K(x, x').

Im Anschluß an die Definition der makroskopischen Eigenschaften lassen sich einige Reihenentwicklungen und Integralformeln für makroskopische Observablen angeben. Der BOREL - Körper $\mathfrak{L}(f_n)$ hat die $\Lambda(f_n|x)$ als Atome, und die $E\{M \mid \mathfrak{L}(f_n)\}(x)$ sind dann Stufenfunktionen auf diesen Atomen. Die Bereiche $\Lambda(f_1^2|x)$ haben immer positives Maß (bzw. sogar Inhalt). Man hat also dann eine Reihenentwicklung für M(x), nämlich

$$M(x) = \sum_\rho m_\rho C\{\Lambda(f_n^2|x_\rho)\}(x) + \lambda(M). \qquad \text{(III, 9)}$$

Eine ähnliche Reihenentwicklung nach makroskopischen Eigenschaften K(x', x) ist ebenfalls angebbar. Es sei Ω eine abzählbare Menge von Elementen x_ν derart, daß durch $K(x_\nu, x)$ jeder Punkt x nur endlich oft überdeckt wird, und u(x) sei die Zahl der Überdeckungen von x. Ferner sei $v_\nu = \int K(x_\nu, x)\,dx$. Dann kann man schreiben:

$$M(x) = \sum_\nu M_\nu K(x_\nu, x) u^{-1}(x) + \lambda(M) \qquad \text{(III, 10)}$$

mit

$$M_\nu = \nu_\nu^{-1} \int K(x_\nu, x')\, M(x')\, dx' , \qquad \text{(III, 11)}$$

wobei evtl. nur noch $\frac{1}{2}\lambda$ aus dem Streifen um M ist und nicht mehr λ selbst. Der Beweis ergibt sich so: x werde von $K(x_{\nu_j}, x)$ $j = 1, \ldots, r$ überdeckt. Dann ist M_{ν_j} eine Zahl aus dem Streifen um M an der Stelle x_{ν_j}. Daher weicht M_{ν_j} und ebenso das Mittel von M_{ν_j} nur um höchstens die doppelte Streifenbreite von M(x) ab.

Eine wichtigere Entwicklung von M(x) ist die Darstellung als Integral, die man in zwei Formen angeben kann. Es sei

$$\nu(x') = \int K(x', x)\, dx \qquad \text{(III, 12)}$$

Man hat also nach Definition immer $\nu(x') \geq V(\Xi_n(x'))$, und ungefähr gleich in dem Sinne, daß die makroskopische Mittelung in beiden Fällen nicht unterscheidbare Rsultate liefert, sind auch $G_1(x', x) = \nu^{-1}(x')\, K(x', x)$ und $G(x', x) = V^{-1}(\Xi_n(x'))\, C(x', x)$. Man bildet nun für eine makroskopische Observable M(x)

$$m(x') = \int M(x)\, K(x', x)\, dx . \qquad \text{(III, 13)}$$

Es ist dann

$$m(x') = \nu(x')\, M(x') + \lambda(M)\, \nu(x'), \qquad \text{(III, 14)}$$

und man hat die Entwicklung

$$M(x) = \int m(x')\, K(x', x)\, \nu^{-1}(x)\, \nu^{-1}(x')\, dx + \lambda(M), \qquad \text{(III, 15)}$$

die nichts weiter als eine andere Schreibweise der Formel $M = G^2 M + \lambda$ ist.

Diese Integralentwicklung kann noch in eine andere Form gebracht werden, indem man die auf Seite 44 eingeführte Integration über f_n^ν für $\nu = 1, 3, 4$ benutzt.
Da K(x, x') bzgl. Permutation der x_r ($x = (x_1, \ldots, x_N)$) in-

variant ist, hat man mit $K(x, x') = K(f_n \mid x)$

$$m(f_n) = \int M(x)\, K(f_n \mid x)\, dx \qquad \text{(III, 16)}$$

und

$$M(x) = \int_{f_n} m(f_n)\, K(f_n \mid x)\, \tilde{v}^{-1}(f_n)\, \tilde{v}^{-1}(x) + \lambda(M) \qquad \text{(III, 17)}$$

Eine praktisch wichtige Frage ist die, welche Rückschlüsse man aus makroskopischen Messungen auf spätere Messungen ziehen kann. Da durch makroskopische Messungen bestenfalls eine makroskopische Eigenschaft $K(x, x')$ festgestellt wird, kann man nicht sagen, in welchem Zustand x sich das System nach der Messung befindet. An dieser Stelle sind also statistische Methoden am Platze und in der Natur der Sache liegend. Hat man eine Gesamtheit mit der Dichte $F_N(x)$ gegeben und schränkt man die Statistik auf die Systeme mit der makroskopischen Eigenschaft $K(Z \mid x)$ ein, so liegt dann natürlich keine genaue Dichte F_N vor, sondern F_N ist nur mit einer gewissen Ungenauigkeit bestimmt. Da K keine exakte charakteristische Funktion ist, kann man das Meßaxiom (vgl. [2] S. 5) nicht unmittelbar anwenden. Es ist aber eine sinngemäße Verallgemeinerung dieses Axioms, die Statistik des Systems mit der Eigenschaft K in der Gesamtheit F_N durch $F_N' = K \cdot F_N$ zu beschreiben. Da K eine gewisse Ungenauigkeit hat, erhält man einen Streifen mit den möglichen F_N nach der Messung von K.

Anders ist die Situation, wenn man eine Gesamtheit nur durch makroskopische Messungen präparieren will, ohne vorher zu wissen, welcher Gesamtheit die betrachteten Systeme angehören. Es ist dann auch prinzipiell nicht möglich, aus dem Bisherigen die Form der Dichten F_N nach einer ausschließlich makroskopischen Präparierung festzulegen. Es wird daher die Annahme III gemacht: Den nur durch makroskopische Messungen präparierten Gesamtheiten kommen Wahrscheinlichkeitsdichten zu, die selbst makroskopisch sind, d. h. es kommen ihnen solche F_N zu, die aus irgendwelchen F_N' durch Anwendung von G entstehen: $F_N = GF_N'$ und außerdem

ist F_N mit einer Ungenauigkeit behaftet, die den wie auf Seite 57 gebildeten Streifen enthält.

Die Annahme III ist eine Verallgemeinerung der TOLMAN-schen Hypothese über makroskopische Gesamtheiten ([7], S. 59).

Da makroskopische F_N mathematisch gleich den makroskopischen Observablen sind, gelten also auch die entsprechenden Entwicklungen. Unter $\lambda(F_N)$ hat man dann sinngemäß zu verstehen, daß Mittelwerte, gebildet mit F_N und $F_N + \lambda(F_N)$, nicht zu unterscheiden sind. Mit

$$F_N(x) = \int_{f_m} \varrho(f_m)\, K(f_m|x)\, \bar{v}^{-1}(f_m)\, \bar{v}^{-1}(x) + \lambda(F_N) \qquad \text{(III, 18)}$$

erhält man dann für die Erwartungswerte:

$$E(M|F_N) = \int_{f_m} \bar{v}^{2}(f_m)\, m(f_m)\, \varrho(f_m) + \lambda(E). \qquad \text{(III, 19)}$$

Um den Erwartungswert einer makroskopischen Observablen mit einem beliebigen F_N auszurechnen, braucht man nur G^*F_N mit $G^*A(x) = \int C(x, x')\, V^{-1}(\Xi_n(x'))\, A(x')\, dx'$. Denn

$$\int M(x)\, F_N(x)\, dx =$$

$$= \int_{f_m} m(f_m)\, \bar{v}^{-1}(f_m) \int F_N(x)\, K(f_m|x)\, \bar{v}^{-1}(x)\, dx. \qquad \text{(III, 20)}$$

Der Operator $G_1^* = \int dx' v^{-1}(x')\, K(x, x')$ liefert aber, angewandt auf ein F_N, eine Funktion, die von G^*F_N nicht unterschieden werden kann. Daher ist es gleichgültig, wie der Operator genau bestimmt ist. Aus dem eben Gezeigten geht noch hervor, daß man zur Berechnung des Erwartungswertes einer Observablen A mit einem makroskopischen F_N auch nur G^*A braucht.

In Kap. II, §5 war die Behauptung aufgestellt und plausi-

bel gemacht worden, daß $V(\Xi_n(x))$ "hinreichend" wenig schwankt. Damit ist aber dann auch $v(x)$ ungefähr gleich $v(x')$ für $x' \in \Xi_n(x)$, und für die Operatoren G und G^* gilt dann

$$G^* A(x) = G A(x) + \lambda (GA) \quad . \qquad \text{(III, 21)}$$

Außerdem kann man statt G^* immer G_1^* und statt G immer $G_1 = v^{-1}(x) \int dx' K(x, x')$.. schreiben. Damit gilt also der Satz: Zur Berechnung von $E(A \mid F_N)$ braucht man, wenn F_N makroskopisch ist, nur GA, und, wenn A makroskopisch ist, nur GF_N. Im ersten Fall braucht A und im zweiten F_N nicht makroskopisch zu sein. Der Operator G ist "fast" ein Projektionsoperator. Dieser Satz läßt sich sogar noch etwas verschärfen. Für solche BOREL - Körper $\mathcal{L}$, wie sie zur Bildung des Streifens $\varkappa(M)$ verwendet werden, die eine Basis atomarer Mengen Π positiven Maßes haben, ist die Bildung der bedingten Erwartung $E\{M \mid \mathcal{L}\}$ gleich der Anwendung eines einfachen Projektionsoperators $E_{\mathcal{L}}$ mit

$$E_{\mathcal{L}} A(x) = \sum_j \zeta\{\Pi_j\}(x) V^{-1}(\Pi_j) \int_{\Pi_j} A(x') dx' \quad . \qquad \text{(III, 22)}$$

Ist z. B. F_N makroskopisch, so gehört $GE_{\mathcal{L}} F_N$ zu einem Streifen, der evtl. die doppelte Ungenauigkeit hat wie $\varkappa(F_N)$. Im Sinne dieser Genauigkeit ist also $E(A \mid F_N) = E(GA \mid F_N) = E(E_{\mathcal{L}} G A \mid F_N)$. Das bedeutet anschaulich, daß man nur eine Funktion aus dem durch GA gebildeten Streifen zu nehmen braucht, um $E(A \mid F_N)$ zu berechnen.

Um makroskopische Observablen für Systeme aus verschiedenen Teilchen (und für reagierende Systeme) zu definieren, geht man wieder so vor, daß man zunächst die Bereiche aus makroskopisch nicht unterscheidbaren Punkten im Phasenraum sucht. Ist Forderung b) und c) bzgl. der Funktion $f_n(A_k, X \mid x)$ für $k = 1, \ldots, K$ erfüllt, so sind in plausibler Verallgemeinerung der früheren Betrachtungen die Punkte x' dann von x makroskopisch nicht zu unterscheiden, wenn $x' \in \Xi'(x) = \bigcap_{k=1}^{\kappa} \Xi_n^{\nu}(A_k \mid x)$ ist, wobei $\Xi_n^{\nu}(A_k \mid x)$ wie

$\Xi_n^{\nu}(x)$ aber für $f_n^{\nu}(A_k; X \mid x)$, $\nu = 1, 3, 4$ gebildet ist. Mit Ξ_n kann man wie oben einen Operator G' einführen und die makroskopischen Observablen definieren, was aber nicht mehr explizit durchgeführt werden soll.

2. Reduzierung der F_N

Bei manchen Herleitungen der BOLTZMANN - Gleichung ([5], [8], [9], [10]) ist es an einer Stelle der Entwicklung nötig, eine Funktion F_2 durch das Produkt $F_1 F_1$ zu ersetzen, und es entsteht die Frage, wann dies möglich ist. Etwas allgemeiner stellt sich die Frage, ob und unter welchen Bedingungen es möglich ist, für F_m mit $m \leq N$ einen Ausdruck zu finden, der nur $F_{m'}$ mit $m' < m$ enthält.

Zu hinreichenden Bedingungen für die Möglichkeit einer solchen Reduzierung gelangt man durch Betrachtung von Ausdrücken $J_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ der Form:

$$J_{n_1, \ldots, n_m} = \int f_{n_1}(\underline{x}_1 \mid x) \cdots f_{n_m}(\underline{x}_m \mid x) F_N(x)\, dx \qquad \text{(III, 23)}$$

mit $M = \sum_{j=1}^{m} n_j < N$. Ist nämlich F_N bzgl. f_k streuungsfrei, so folgt, daß F_N auch bzgl. f_r mit $r \leq k$ streuungsfrei ist. Ist jetzt $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_r \leq k \leq n_{r+1} \leq \ldots \leq n_m$, so folgt aus der Voraussetzung

$$J_{n_1, \ldots, n_m} = f_{n_1} \cdots f_{n_r} \int f_{n_{r+1}} \cdots f_{n_m} F_N\, dx\,. \qquad \text{(III, 24)}$$

Da aber $f_n = L_n \overline{F}_n^n$ ist, folgt daraus

$$J_{n_1, \ldots, n_m} = L_{n_1} \overline{F}_{n_1}^{n_1} \cdots L_{n_r} \overline{F}_{n_r}^{n_r} J_{n_{r+1}, \ldots, n_m}\,. \qquad \text{(III, 25)}$$

Die beiden Ausdrücke $J_{n_1, \ldots, n_m}$ und $J_{n_{r+1}, \ldots, n_m}$ können nun durch Einsetzen der Entwicklungsformeln für f_n einfach ausgerechnet werden. Man erhält dabei jeweils eine Summe

von Ausdrücken, die ein (etwas komplizierter gemitteltes) $\overline{F_\rho}$ mit $\rho \leq M = \sum_{j=1}^{m} n_j$ bzw. $\rho \leq \sum_{j=\nu+1}^{m} n_j$ und Produkte von D_n Funktionen linear enthalten. Wählt man nun F_N auch noch so, daß die Mittelungen weggelassen werden können, so hat man damit eine Reduktionsformel für F_M mit $M = \sum_{j=1}^{m} n_j$ erhalten. Im Gegensatz zu der von manchen Autoren vertretenen Auffassung geht die Wechselwirkung zwischen den Teilchen eines einzelnen Systems aus der Gesamtheit, die durch F_N beschrieben wird, nicht ein. Die Reduzierung ist eben keine Angelegenheit der Wechselwirkung, d. h. des einzelnen Systems, sondern nur eine Angelegenheit der Gesamtheit.

Das allgemeine Programm soll nun für den Fall $n_j = 1$ explizit durchgeführt werden. Dabei soll auch sofort $f_1 = f_1^2$ genommen werden. Man hat also mit $J_1, \ldots, {}_1 \equiv J_{1n}$

$$J_{1m} = V_1^{-n} \int F_N(x) \sum \prod_{j=1}^{n} D_1(\bar{x}_j, x_{\rho_j}) \, dx \,, \qquad \text{(III, 26)}$$

wobei die Summe über alle Variationen mit Wiederholungen von N Stück zur n-ten Klasse zu erstrecken ist. Die Gesamtanzahl solcher Variationen ist N^n. Zwei Variationen sollen äquivalent heißen, wenn man jedes der Symbole, aus denen die eine Variation besteht, an allen Stellen, wo es vorkommt, durch ein anderes ersetzen kann, so daß die andere Variation entsteht. Z. B. sind für n = 6 die Variationen aabbca, yyaajy und bbccdb äquivalent. Damit ist in der Menge aller Variationen eine Klasseneinteilung induziert, und jede Klasse repräsentiert einen bestimmten Typ T. Die Elemente jeder Klasse unterscheiden sich dann nur noch durch die Belegung mit Symbolen. Mit $K_N^n(T)$ werde die Anzahl der möglichen Belegungen von T, also die Anzahl in der Klasse T bezeichnet.

Es werde jetzt ein bestimmter Summand aus J_{n1} betrachtet und zwar

$$\sigma = V_1^{-n} \int dx \, F_N(x) \prod_{j=1}^{n} D_1(\bar{x}_j, x_{\rho_j}) \qquad \text{(III, 27)}$$

mit $\rho_j = 1$ für $j = 1,\ldots, \lambda_1$, $\rho_j = 2$ für $j = \lambda_1+1,\ldots$ .., $\lambda_1+\lambda_2$ usw., d. h. $\sum_{\kappa=1}^{\hat{}} \lambda_\kappa = n$. Daraus folgt:

$$\sigma = \bar{V}_1^n \int dx_1 \cdots dx_m \, f_m(x_1, \cdots, x_m) \prod_{j=1}^{n} D_1(\bar{x}_j, x_{\rho_j}). \quad \text{(III, 28)}$$

Wenn nun $\lambda_\kappa > 1$ ist, so ist σ nur dann ungleich Null, wenn die zugehörigen X_j in der gleichen Zelle liegen, d. h. aber, wenn das Produkt

$$D = D_1(\bar{x}_1, \bar{x}_1)\, D_1(\bar{x}_2, \bar{x}_2) \cdots\cdots D_1(\bar{x}_1, \bar{x}_{\lambda_1}) \cdot$$

$$\cdot D_1(\bar{x}_{\lambda_1+1}, \bar{x}_{\lambda_1+1}) \cdots\cdots D_1(\bar{x}_{\lambda_1+1}, \bar{x}_{\lambda_1+\lambda_2}) \quad \text{(III, 29)}$$

$$\cdots\cdots$$

ungleich Null ist. Damit ist dann

$$\sigma = D(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_\kappa)\, \bar{F}_\mu^1(\bar{x}_1, \bar{x}_{\lambda_1+1}, \cdots), \quad \text{(III, 30)}$$

wobei die 1 - Mittelung über jede einzelne Koordinate zu erstrecken ist. Da die x_{ρ_j} bei den vorangegangenen Betrachtungen aber nur Integrationparameter sind, hängt also das Ergebnis nur vom Typ der betrachteten Variation ab. Dies gilt auch allgemein. Für jeden Typ erhält man aber eine andere Zusammenfassung von D_1 - Funktionen, die mit $D(T \mid X_1, \ldots, X_n)$ bezeichnet werden soll. Damit wird also

$$J_{1m} = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{s(\beta)} K_N^n(T_{\alpha\beta})\, D(T_{\alpha\beta} \mid \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_m) \cdot$$

$$\cdot \bar{F}_\beta^1(\cdots, \bar{x}_\nu, \cdots), \quad \text{(III, 31)}$$

wobei $s(\beta)$ die Anzahl der Typen ist, zu deren Belegung verschiedene Symbole nötig sind. Der Koeffizient von F_n^1 ist leicht zu bestimmen, er ist $n!\binom{N}{n}$ ohne eine D - Funk-

tion. Wenn nun F_N bzgl. f_1 streuungsfrei ist, so ist

$$J_{1n} = N^n \bar{F}_1^{-1}(\bar{X}_1) \cdot \ldots \cdot \bar{F}_1^{-1}(\bar{X}_n), \qquad \text{(III, 32)}$$

und die Reduktionsformel lautet:

$$\bar{F}_n^{-1}(\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_n) = (n!\binom{N}{n})^{-1} \Big[N^n \bar{F}_1^{-1}(\bar{X}_1) \cdots \bar{F}_1^{-1}(\bar{X}_1) - \sum_{\beta=1}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^{\binom{n}{\beta}} K_N^n(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}) D(\bar{\Gamma}_{\alpha\beta} | \bar{X}_1, \cdots) \bar{F}_\beta^{-1}(\cdots, \bar{X}_n, \cdots) \Big]. \qquad \text{(III, 33)}$$

Um die Mittelungsstriche weglassen zu können, muß F_N nicht nur streuungsfrei bzgl. der f_1, sondern auch in bestimmter Weise "glatt" sein. Beide Eigenschaften sind miteinander verträglich. Denn nimmt man als F_N eine Funktion, die praktisch nur auf $\Xi_1(\mathring{x})$ von Null verschieden ist und die nicht zu stark variiert, so daß $\bar{F}_N^{-1} = F_N$ ist, so sind beide Voraussetzungen erfüllt. Eine makroskopische Eigenschaft auf $\Xi_1(\mathring{x})$ z. B. ist eine solche Funktion, für die beide Voraussetzungen erfüllt sind.

Für n = 2 erhält man durch Spezialisieren

$$F_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = \frac{N}{N-1} F_1(\bar{X}_1) \Big(F_1(\bar{X}_2) - \frac{1}{N V_1} D_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2) \Big). \qquad \text{(III, 34)}$$

Nun ist aber $F_1(X_2) = N^{-1} f_1(X_2 | \mathring{x})$, und da man $V_1^{-1} D_1$ gegen f_1 vernachlässigen kann und ebenso 1 gegen N, folgt die Faktorisierung von F_2:

$$F_2(\bar{X}_1, \bar{X}_2) = F_1(\bar{X}_1) \cdot F_1(\bar{X}_2) \qquad \text{(III, 35)}$$

unter den angegebenen Voraussetzungen. Bei der in ([8]) gegebenen Ableitung der BOLTZMANN - Gleichung wird die Voraussetzung gemacht, daß man, leger ausgedrückt, immer so rechnen kann, als ob ein F_N immer eine makroskopische Eigenschaft auf einem Ξ_1 wäre. Ist diese Annahme richtig, so folgt also auch die Faktorisierung für alle Zeiten

und braucht nicht durch besondere Annahmen eingeführt zu werden.

Kap. IV Das zeitliche Verhalten makroskopischer Systeme

1. Makroskopisch MARKOFFSCHE und determinierte Strömungen in

Bei der zeitlichen Entwicklung mechanischer Systeme sind, wie in Kap. I ausgeführt, zwei Typen zu unterscheiden, nämlich Strömungen im Phasenraum und nicht triviale MARKOFF - Prozesse. Die Strömungen (, die ja auch trivialerweise MARKOFFSCHE Prozesse darstellen,) umfassen die zeitliche Entwicklung aller Systeme, die in der "gewöhnlichen" Mechanik beschreibbar sind. Sie sind eineindeutige Punktabbildungen des Phasenraumes auf sich und außerdem maßtreu für eine Reihe von Maßen. In diesem Kapitel sollen nur Strömungen betrachtet werden, was physikalisch bedeutet, daß nur nichtreagierende Systeme mit konstanter Teilchenzahl untersucht werden sollen. Weiter werden nur Systeme betrachtet, die eine zeitunabhängige HAMILTON - Funktion haben, was zur Folge hat, daß der Operator $U_{t,\,t'}$, der die Zustände zur Zeit t in die zur Zeit t' überführt, nur von $t - t'$ abhängt. Die Menge der U_t bildet dann eine einparametrige ABELSCHE Gruppe mit der Eigenschaft $U_t U_{t'} = U_{t+t'}$. Für viele Untersuchungen des zeitlichen Verhaltens mechanischer Systeme ist es zweckmäßig, nicht den ganzen Γ - Raum zu betrachten, sondern nur eine zeitinvariante Menge. Für abgeschlossene Systeme lassen sich dann zeitinvariante Mengen endlichen positiven L - Maßes finden, z. B. Energieschalen. Es ist möglich, daß ein makroskopisches System im Laufe seiner zeitlichen Entwicklung den Bereich Γ' verläßt, in dem eine makroskopische Beschreibung möglich ist. Nicht abgeschlossene Gase z. B. haben diese Eigenschaft.

Unabhängig von dieser Einteilung (und Spezialisierung) der Systeme, deren zeitliches Verhalten untersucht wird, gibt es auch verschiedene Fragestellungen im Hinblick auf die Entwicklung irgendwelcher Systeme in der Zeit. So wird z. B. in der Ergodentheorie das mittlere zeitliche Verhalten in unendlichen Zeitintervallen untersucht.

Im vorliegenden Kapitel sollen nun zwei spezielle Typen von Strömungen untersucht werden, nämlich makroskopisch MARKOFFSCHE und makroskopisch determinierte, und es ist das Ziel, für Systeme mit diesen Strömungen Bewegungsgleichungen anzugeben, die nur noch makroskopische Größen enthalten. Dabei werden folgende Bezeichnungen verwendet: $\alpha(x, t)$ bedeutet einen Lösungsvektor der HAMILTONSCHEN Bewegungsgleichungen mit dem Anfangswert x. $\alpha(x, t)$ ist eine Punktabbildung im Γ - Raum, und es wird manchmal auch $U_t x$ dafür geschrieben. Der durch $U_t x$ auf der Menge der Observablen induzierte Operator wird ebenfalls mit U_t bezeichnet: $U_t A(x) = A(U_t x) = A(\alpha(x, t))$. Eine Strömung U_t in einem Teil Γ'' von Γ' heißt makroskopisch MARKOFFSCH, wenn mit $V_t = GU_tG$ gilt:

$$V_{t+t'} = V_t \cdot V_{t'} \qquad \text{für } t, t' \in (T_1, T_2) \text{ und } t+t' \in (T_1, T_2). \qquad \text{(IV, 1)}$$

Eine Strömung U_t in einem Teil Γ'' von Γ' heißt makroskopisch determiniert, wenn es zu jedem $x \in \Gamma''$ (mindestens) ein $x' = W_t x$ gibt, so daß mit $C(x, x') = C\{\Xi_n(x)\}(x')$ und mit

$$L(t, x, x') \equiv C(x, U_{-t}x')\left[C\{\Gamma'\}(x) - C(V_t x, x')\right] \qquad \text{(IV, 2)}$$

für $t \in (T_1, T_2)$

$$L'(x) \equiv 0 \subset \varkappa(GL) \qquad \text{(IV, 3)}$$

gilt. Das bedeutet anschaulich, daß

$$U_t\left(\Xi_n(x) - \Pi_t(x)\right) \subset \Xi_n(W_t x) \qquad \text{(IV, 4)}$$

ist, wobei $U_t\ \Pi_t(x)$ eine Menge so kleinen Maßes ist, daß ihre charakteristische Funktion L makroskopisch nicht von Null unterschieden werden kann. Aus dieser anschaulichen Bedeutung geht auch hervor, daß $W_t x$ zunächst nicht eindeutig bestimmt sein wird. Man kann aber W_t auf eine Weise festgelegt denken, und es ist zweckmäßig, noch zu fordern,

daß $W_t W_{t'} = W_{t+t'}$ ist. Multipliziert man nämlich (IV, 4) mit $U_{t'}$, so folgt

$$U_{t+t'}\left(\Xi_n(x) - \Pi_t(x)\right) \subset U_{t'}\,\Xi_n(W_t x) . \qquad \text{(IV, 5)}$$

Andererseits ist auch

$$U_{t'}\left(\Xi_n(W_t x) - \Pi_{t'}(W_t x)\right) \subset \Xi_n(W_{t'} W_t x) \qquad \text{(IV, 6)}$$

Es ist also

$$U_{t+t'}\,\Xi_n(x) - \begin{cases} U_{t+t'}\,\Pi_{t+t'}(x) \subset \Xi_n(W_{t+t'} x) \\ \widetilde{\Pi}_{t,t'}(x) \subset \Xi_n(W_{t'} W_t x) \end{cases} \qquad \text{(IV, 7)}$$

Beide Mengen $\Pi_{t+t'}$ und $\widetilde{\Pi}_{t,t'}$ (letztere ist durch (IV, 5) und (IV, 6) bestimmt) haben "sehr kleines" Maß. Die Forderung $W_t W_{t'} = W_{t+t'}$ ist also mit der Definition der makroskopisch determinierten Strömung im Einklang.

Weiter ist es anschaulich plausibel, daß man W_t auch noch so bestimmen kann, daß die dadurch induzierte Abbildung in Γ' selbst determiniert ist, d. h., daß

$$W_t\left(\Xi_n(x) - \hat{\Pi}_t(x)\right) \subset \Xi_n(W_t x) \qquad \text{(IV, 8)}$$

gilt. (Streng genommen müßte natürlich eine explizite Definition von W_t durch Induktion gegeben werden, so daß beide Forderungen erfüllt sind.)

Damit läßt sich nun zeigen, daß makroskopisch determinierte Strömungen Spezialfälle makroskopisch MARKOFFSCHER sind. Zum Beweis geht man von der Darstellung von V_t als Integraloperator aus. Der Kern dieses Operators ist

$$V_t(x'x) = \nu^{-1}(x)\,\nu^{-1}(x') \int dx''\, K(x, x'')\, K(a(x'', t), x') \qquad \text{(IV, 9)}$$

Wenn nun die Strömung für $t \in (T_1, T_2)$ makroskopisch de-

terminiert ist, so ist (im Sinne von makroskopisch gleich)

$$V_{-t}(x', x) = \nu^{-1}(x)\, k(x, W_t x') \,. \qquad \text{(IV, 10)}$$

Denn $K(\alpha(x'', -t), x')$ ist (praktisch) eine charakteristische Funktion auf der Menge $\{x''\} = U_t\, \Xi_n(x')$ für jedes x'. Da aber $U_t\, \Xi_n(x') \subset \Xi_n(W_t x')$ ist, wird die charakteristische Funktion auf $U_t\, \Xi_n(x')$ nur über $\Xi_n(W_t x')$ "verschmiert". Damit wird nun durch einfaches Umrechnen

$$\int dx''\, V_{-t}(x', x)\, V_{-t'}(x'', x'') =$$

$$= \nu^{-1}(x) \int dx''\, \nu^{-1}(x'')\, k(x'', W_{t'} x')\, k(x, W_t x'') \,. \qquad \text{(IV, 11)}$$

Der Integrand ist ungleich Null, wenn $W_t x'' \in W_t\, \Xi_n(W_{t'} x')$ und $W_t x'' \in \Xi_n(x)$ gilt. Da nach Voraussetzung $W_t\, \Xi_n(W_{t'} x')$ in $\Xi_n(W_t W_{t'} x')$ liegt, bedeutet die Integration über x'' anschaulich, daß die charakteristische Funktion von $W_t\, \Xi_n(W_{t'} x)$ über $\Xi_n(W_{t+t'} x)$ "verschmiert" wird. Daraus folgt aber

$$V_{-(t+t')}(x', x) = \nu^{-1}(x)\, k(x, W_{t+t'} x')$$

$$= \int dx''\, V_{-t}(x'', x)\, V_{-t'}(x', x'') \,. \qquad \text{(IV, 12)}$$

Es ist nun bisher nicht gelungen, nachzuweisen, daß es wirklich makroskopisch MARKOFFSCHE Strömungen gibt, obwohl die zugrundeliegende (mikroskopische) Strömung U_t in jedem Falle MARKOFF - Charakter hat. Es entsteht nun die Frage, ob sich nicht wenigstens zeigen läßt, daß nicht allgemein die Annahme des MARKOFFSCHEN oder determinierten Verhaltens von V_t im Widerspruch zu bekannten Sätzen, wie Umkehr- und Wiederkehrsatz steht.

Es sei T die Transformation von $x = (p, q)$, für die $T(p, q)$

= (-p, q) ist. T ist maßerhaltend, und der Umkehrsatz sagt aus, daß $U_t T = T U_{-t}$ ist. Unter der physikalischen Annahme, daß die makroskopischen Meßungenauigkeiten für x und Tx gleich sind, folgt, wie auf S. 49 gezeigt, daß $T\, \Xi_n(x) = \Xi_n(Tx)$ ist. Durch $TA(x) = A(Tx)$ ist ein Operator T auf den Observablen erklärt. Unter der obigen Voraussetzung gilt dann GT = TG. Denn $TG(x, x') = G(Tx, x)$ und $G(x, x')T = G(x, Tx')$. D. h., im ersten Fall muß $x' \in \Xi_n(Tx)$, im zweiten $x' \in T\, \Xi_n(x)$ sein. Damit läßt sich nun zeigen, daß mit $V_t\, V_{t'} = V_{t+t'}$ auch $V_{-t}\, V_{-t'} = V_{-t-t'}$ gilt. Denn

$$
\begin{aligned}
V_{-t} \cdot V_{-t'} &= G\, U_{-t}\, G\, G\, U_{-t'}\, G = \\
&= G\, T\, U_t\, T\, G\, G\, T\, U_{t'}\, T\, G = T\, V_{t+t'}\, T \qquad \text{(IV, 13)} \\
&= T\, G\, U_{t+t'}\, G\, T = G\, T\, U_{t+t'}\, T\, G \\
&= V_{-t-t'} .
\end{aligned}
$$

Damit ist also gezeigt, daß der MARKOFF - Charakter von V_t zu keiner Auszeichnung einer Zeitrichtung Anlaß gibt. Dasselbe gilt auch für makroskopisch determinierte Strömungen. Denn aus

$$
U_t\, (\Xi_n(x) - \Pi_t(x)) \subset \Xi_n(W_t x) \qquad \text{(IV, 14)}
$$

folgt für $x = Tx'$

$$
U_{-t}\, (\Xi_n(x') - T\, \Pi_t(Tx')) \subset \Xi_n(T\, W_t\, T x') . \qquad \text{(IV, 15)}
$$

Wenn also U_t in Γ'' für $t \in (T_1, T_2)$ determiniert ist, wenn mit $x \in \Gamma''$ auch $Tx \in \Gamma''$ ist und wenn $T\, \Xi_n(x) = \Xi_n(Tx)$ ist, so folgt, daß U_t es auch für $t \in (-T_1, -T_2)$ ist.

Der Umkehrsatz liefert auch die Möglichkeit zu zeigen, daß nicht durchweg $W_t = U_t$ sein kann. Denn angenommen $W_t = U_t$, so folgt

$$U_t(\Xi_n(U_{-t}x) - \Pi_t(U_{-t}x) \subset \Xi_n(x) \qquad \text{(IV, 16)}$$

und

$$U_{-t}(\Xi_n(x) - T\,\Pi_t(Tx)) \subset \Xi_n(U_t x) \qquad \text{(IV, 17)}$$

D. h. aber $\Xi_n(x)$ und $U_t\ \Xi_n(U_{-t}x)$ unterscheiden sich nur in einer Menge kleinen Maßes. Dieses Resultat widerspricht aber den für n = 1 bekannten Tatsachen, daß die $\Xi_n(x)$ sehr unterschiedliche Volumina haben. Über die Konsequenzen des Wiederkehrsatzes läßt sich folgendes sagen: Eine Aussage über die zeitliche Entwicklung eines einzelnen abgeschlossenen Systems ist dann falsch, wenn in ihr ein anderer als "fast periodischer" Ablauf behauptet wird. In statistischen Aussagen aber kann "aperiodischer" Ablauf behauptet werden. In diesem Sinne verstößt die Annahme des MARKOFFSCHEN Charakters von V_t nicht gegen den Wiederkehrsatz. Denn die Annahme braucht nur in einem endlichen Zeitintervall richtig zu sein. Aber auch für unendliche Zeitintervalle ergibt sich kein Widerspruch. Denn, wie in §3 gezeigt wird, genügt V_t nur, um makroskopische Erwartungswerte zu berechnen , und aus dem MARKOFF - Charakter von V_t kann nicht geschlossen werden, daß dann diese Erwartungswerte einem Grenzwert zustreben, sondern dazu muß noch eine andere Bedingung erfüllt sein, die sog. DÖBLINsche Bedingung (vgl. DOOB [11] S. 256). Ist diese zusätzlich erfüllt, so streben gewisse Erwartungswerte einem Grenzwert zu, und auch das verstößt nicht gegen den Wiederkehrsatz. Aus diesem Grunde kann auch eine Strömung "immer" makroskopisch determiniert sein. Für determinierte Strömungen folgt auch noch aus dem Wiederkehrsatz, daß die Ausnahmemengen $\Pi_t(x)$ nicht immer verschwinden können, wenn die Strömung U_t überhaupt Übergänge zwischen Ξ_n verschiedenen Maßes vermittelt. Denn angenommen, $\Xi_n(x)$ geht vollständig in $\Xi_n(x')$ über und $V(\Xi_n(x)) < V(\Xi_n(x'))$, so kann kein Punkt von $\Xi_n(x)$ zu irgendeiner späteren Zeit die Mengen $\Xi_n(x'')$ verlassen, für die $V(\Xi_n(x'')) \geq V(\Xi_n(x'))$ ist, also auch nicht nach

$\Xi_n(x)$ zurückkehren, im Widerspruch zum Wiederkehrsatz. Es lassen sich nun (vgl. § 2 und 3) für die hier betrachteten Strömungen Bewegungsgleichungen herleiten, die die BOLTZMANN - Gleichung als Spezialfall enthalten, und da viele der mit Hilfe der BOLTZMANN - Gleichung und mit Hilfe MARKOFFSCHER Gleichungen gewonnenen Ergebnisse von der Erfahrung gut bestätigt werden, wird man gerade erwarten, daß makroskopische Systeme MARKOFFSCHE Strömungen haben. Der Anwendbarkeit der im folgenden hergeleiteten Gleichung liegt also streng genommen eine Annahme zugrunde, nämlich die Annahme IV: Die Modelle realer makroskopischer Systeme haben makroskopisch MARKOFFSCHE Strömungen.

Neuere Arbeiten von PRIGOGINE und Mitarbeitern lassen es ferner nicht hoffnungslos erscheinen, die MARKOFF - Bedingung (IV, 1) auf leichter überschaubare Bedingungen zurückzuführen [12].

2. Determinierte Gleichungen (BOLTZMANN - Gleichung)

Für makroskopisch determinierte Strömungen läßt sich folgender Satz mit Hilfe einer Zweierstoßannahme beweisen: Die BOLTZMANNSCHE Dichte $f_1(X \mid x, t) = f_1(X \mid \alpha(x, t))$ genügt für die "meisten" x der BOLTZMANN - Gleichung. Die Ausnahmemenge wird dabei im allgemeinen von t abhängen. Die Idee dieses Satzes stammt von G. LUDWIG. Der Beweis wurde von W. MÜLLER zusammen mit dem Verfasser ausgeführt [8]. Die so abgeleitete BOLTZMANN - Gleichung enthält keinen Widerspruch zum Umkehr- oder Wiederkehrsatz, da sie nur eine statistische Aussage darstellt.

In einem gewissen Sinne gilt nun auch die Umkehrung dieses Satzes. Dazu betrachtet man den Raum $\widetilde{\Gamma}^\nu$ aller $f_n^\nu(X)$ für $\nu = 1, 3, 4$. Wenn die HAMILTON - Funktion H invariant bzgl. Vertauschung von Teilchen ist, ist U_t vertauschbar mit den Permutationen P der Teilchen. D. h. aber $U_t Px = PU_t x$. Aus diesem Grunde gibt es in $\widetilde{\Gamma}^\nu$ einen Operator R_t mit $f_n^\nu(X, t) = R_t f_n^\nu(X)$, wenn $f_n^\nu(X) = f_n^\nu(X \mid x)$ und $f_n^\nu(X, t) = f_n^\nu(X \mid x, t)$ ist. Für die Funktion $f_n^\nu(X \mid x)$ läßt sich also die Zeitveränderlichkeit in zwei Weisen angeben, er-

stens durch den Operator U_t und zweitens durch den(nicht linearen) Operator R_t. Wenn nun R_t jeden Streifen σ_n^ν einer Teilmenge $\tilde{\Gamma}''$ von $\tilde{\Gamma}$ bis auf eine Menge kleinen Maßes in einen anderen überführt, so ist U_t makroskopisch determiniert. Denn aus

$$R_t\,(\sigma_n^\nu(x) - \pi_t(x)) \subset \sigma_n^\nu(W_t x) \qquad \text{(IV, 18)}$$

folgt sofort

$$U_t\,(\Xi_n(x) - \pi_t(x)) \subset \Xi_n(W_t x)\,. \qquad \text{(IV, 19)}$$

Bei Lösungen der BOLTZMANN - Gleichung und ähnlicher Gleichungen wird nun häufig die Voraussetzung gemacht, daß sie sich immer oder für bestimmte Zeiten approximieren lassen durch gewisse einfache Ausdrücke. Das entspricht aber gerade der Gleichung (IV, 18), und daher liegen solchen Gleichungen makroskopisch determinierte Strömungen zugrunde.

3. MARKOFFSCHE Gleichungen

Unter der Annahme des makroskopisch MARKOFFSCHEN Charakters von U_t, d. h. des MARKOFF - Charakters von V_t lassen sich Gleichungen herleiten, die die Statistik der makroskopischen Observablen zu einer Zeit t bestimmen, wenn sie zu einer bestimmten anderen Zeit t' bekannt ist. $M(x)$ und $F_N(x)$ seien makroskopische Größen. Der Erwartungswert zur Zeit t ist dann:

$$E_t(M|F_N) = \int dx\, M(x)\, U_t^*\, F_N(x)\,, \qquad \text{(IV, 20)}$$

d. h., je nachdem man HEISENBERG - Bild oder SCHRÖDINGER - Bild verwendet, ist:

$$\begin{aligned} E_t(M|F_N) &= E(U_t M|F_N) \\ &= E(M|U_t^* F_N)\,. \end{aligned} \qquad \text{(IV, 21)}$$

Nun ist $U_t^* F_N$ oder $U_t M$ im allgemeinen nicht makroskopisch, aber für die Berechnung von E_t braucht man, wie in Kap.III, §1 gezeigt, nur $GU_t^* F_N$ oder $GU_t M$. Daraus folgt aber, da $GM = M$ ist, daß man zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung von Erwartungswerten makroskopischer Observablen in makroskopischen Gesamtheiten nur $GU_tG = V_t$ braucht. Ferner genügt es, wenn man die zeitliche Entwicklung für die speziellen Observablen $K(f_n \mid x)$ betrachtet. Denn für eine makroskopische Observable $M(x)$ gilt die Entwicklung

$$M(x) = \int_{f_n} m(f_n)\, v^{-1}(f_n)\, v^{-1}(x)\, k(f_n \mid x) + \lambda(M), \quad \text{(IV, 22)}$$

die man wegen der schwachen Variation von $v(x)$ auch in die Form

$$M(x) = \int_{f_n} m(f_n)\, v^{-2}(f_n)\, k(f_n \mid x) + \lambda(M) \quad \text{(IV, 23)}$$

bringen kann, und daraus folgt:

$$E_t(M \mid F_N) = \int_{f_n} v^{-2}(f_n)\, m(f_n)\, E_t(k(f_n \mid x) \mid F_N(x)). \quad \text{(IV, 24)}$$

Für $E_t(K(f_n \mid x) \mid F_N(x))$ führt man eine spezielle Bezeichnung ein, nämlich $\varrho(f_n \mid t)$. Setzt man die Entwicklung von F_N nach $K(f_n \mid x)$ in ϱ ein, so erhält man, wenn wieder $v(x) \approx v(x')$ für $K(x, x') \neq 0$ angenommen wird,

$$\varrho(f_n \mid t) = \int_{\hat{f}_n} v^{-1}(\hat{f}_n)\, \varrho(\hat{f}_n) \cdot \left[v^{-1}(\hat{f}_n) \int dx\, k(\hat{f}_n \mid x)\, U_t\, k(f_n \mid x) \right]. \quad \text{(IV, 25)}$$

Die eckige Klammer soll als $V_t'(\hat{f}_n, f_n)$ bezeichnet werden. $V_t'(\hat{f}_n, f_n)$ genügt der CHAPMAN - KOLMOGOROFF - Gleichung für stationäre Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn $V_{t+t'} = V_t \cdot V_{t'}$ ist. V_t läßt sich als Integraloperator schreiben. Für dessen Kern

$$V_t(x', x) = \int dx'' \, G(x, x'') \, G(\alpha(x'', t), x') \,, \qquad \text{(IV, 26)}$$

wobei $\alpha(x, t)$ eine Lösung der HAMILTONSCHEN Gleichungen sein soll, gilt nach Voraussetzung:

$$V_{t+t'}(x', x) = \int dx'' \, V_{t'}(x, x'') \, V_t(x'', x) \,. \qquad \text{(IV, 27)}$$

Nach der Definition von $V_t'(\hat{f}_n, f_n)$ ist aber wegen der Symmetrie gegenüber Perm x $V_t(x', x)$:

$$V_t'(\hat{f}_n, f_n) = v(f_n) \, V_t(\hat{f}_n, f_n) \,. \qquad \text{(IV, 28)}$$

Daher gilt mit der Abkürzung $\int_{f_n} v^{-1}(f_n) = \bar{\int}_{f_n}$

$$V_{t+t'}'(\hat{f}_n, f_n) = \bar{\int}_{f_n^*} V_t'(\hat{f}_n, f_n^*) \, V_{t'}'(f_n^*, f_n) \,. \qquad \text{(IV, 29)}$$

$\rho(f_n \mid t)$ ist also durch die Gleichung eines stationären MARKOFFSCHEN Prozesses bestimmt:

$$\rho(f_n \mid t) = \bar{\int}_{\hat{f}_n} \rho(\hat{f}_n) \, V_t'(\hat{f}_n, f_n) \,. \qquad \text{(IV, 30)}$$

Denn ρ und V_t' erfüllen auch alle für Wahrscheinlichkeiten geforderten Normierungsbedingungen. Es ist

$$\bar{\int}_{f_n} \rho(f_n \mid t) = \int dx \int dx' \, G(x, x') \, U_t^* \, F_N(x') \,. \qquad \text{(IV, 31)}$$

Nun ist

$$\int dx \, G(x, x') = \int dx \, v^{-1}(x) \, K(x, x')$$

$$= \int dx \, v^{-1}(x') \, K(x, x') = 1 \qquad \text{(IV, 32)}$$

Daraus folgt aber auch $\int_{f_n} \rho\,(f_n \mid t) = 1$, wenn $\int F_N\,dx = 1$ ist. Ferner hat man

$$\int_{f_n} V_t\,(\hat{f}_n, f_n) = 1 \qquad \text{(IV, 33)}$$

zu zeigen. Unter Benutzung der Definition von V_t und V_t' erhält man mit $\hat{f}_n \longleftrightarrow \hat{x}$:

$$\int_{f_n} V_t'(\hat{f}_n, f_n) = \int dx\; V_t(\hat{x}, x) =$$

$$= \int dx \int dx'\; G(x, x')\, G(\alpha(x', t), \hat{x}) = \qquad \text{(IV, 34)}$$

$$= \int dx\; G(\alpha(x, t), \hat{x}) = \int dx'\; G(x', x) = 1 .$$

Schließlich folgt noch aus der Definition, daß $V_t' \geq 0$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wegen der bei der Ableitung immer wieder benutzten Näherungen ist es nicht unproblematisch, von (IV, 30) zur üblichen Form der master equation durch einfaches Differenzieren überzugehen. Man kann dabei etwa so vorgehen, daß man sich auf eine geeignete Definition von V_t aus der Menge aller möglichen festlegt und dafür die entsprechende Gleichung (IV, 30) betrachtet. Für eine solche Gleichung gelten dann alle Resultate über MARKOFFSCHE Prozesse, z. B. auch, daß $\rho\,(f_n \mid t)$ der master equation genügt:

$$\dot{\rho}(f_n \mid t) = \int_{\hat{f}_n} \rho(\hat{f}_n \mid t)\; W(\hat{f}_n, f_n) . \qquad \text{(IV, 35)}$$

Diese Gleichung läßt sich in eine etwas andere, physikalisch besser überschaubare Form bringen, wenn man voraussetzt, daß $F_N(x)$ nur in einer makroskopisch möglichst kleinen Energieschale von Null verschieden ist und daß die HAMILTON - Funktion des Systems

$$H(x) = \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{3}\sum_{r=1}^{N} p_r^{j\,2} + \frac{1}{2}\sum_{r\neq s}^{N} V(q_r, q_s) + V_a \qquad \text{(IV, 36)}$$

lautet. Die erste Voraussetzung hat zur Folge, daß man die Funktionen $K(\tilde{f}_n \mid x) = K(\tilde{x}, x)$, die ja praktisch charakteristische Funktionen auf den $\Xi_n(\tilde{x})$ mit "verschmierten" Rändern sind, ersetzen kann durch $I(\tilde{f}_n \mid x) = I(\tilde{x}, x)$, die charakteristische Funktionen auf $\Theta_\gamma(f_n \mid \tilde{x})$ mit "verschmierten" Rändern sein sollen. In Kap. II, §4 war gezeigt worden, daß für zwei Funktionen $f_n^\nu(X \mid \tilde{x})$ und $f_n^\nu(X \mid \hat{x})$ mit $\hat{x} \in \Theta_\gamma(f_n \mid \tilde{x})$ die Differenz $g(X) = f_n^\nu(X \mid \tilde{x}) - f_n^\nu(X \mid \hat{x})$ einen bestimmten Betrag nicht überschreiten kann. Damit aber g möglichst große Werte annehmen kann, müssen in der Entwicklung für $f_n^\nu(X \mid x)$

$$f_n^\nu(\underline{X} \mid x) = V_n^{-1} \sum_{\rho=1}^{L_n} \hat{D}_n^\nu(\underline{X}^\rho(x), \underline{X}) \qquad \text{(IV, 37)}$$

die Vektoren $X^\rho(\tilde{x})$ und $X^\rho(\hat{x})$ möglichst nur in zwei kleinen Gebieten von der Größenordnung der Δ_n so verschieden gelagert sein, daß $g(X)$ den zulässigen Höchstwert nicht überschreitet. D. h. aber, wenn x gegeben ist, müssen, damit $g(X)$ möglichst große Werte hat, viele Punkte $X^\rho(\tilde{x})$ sehr dicht beieinander liegen. Wenn $H(p, q)$ für kleine Abstände stark variiert, d. h., wenn im System stark abstoßende oder stark anziehende Kräfte wirken, so werden sich die Punkte $\tilde{x}$ und $\hat{x}$ hinsichtlich der Energie stark unterscheiden. Wenn nun F_N nur für Punkte von Null verschieden ist, die sich hinsichtlich der Energie makroskopisch nicht unterscheiden, so kann man statt $F_N(x)\, K(\tilde{f}_n \mid x)$ in guter Näherung auch $F_N(x)\, I(\tilde{f}_n \mid x)$ schreiben. Um $f_n(X \mid x)$ von $f_n(X)$ unterscheiden zu können, schreibt man $\bar{f}_n(X)$ statt $f_n(X)$, und zur Abkürzung $d(f_n \mid \bar{x}, x) = d_n(\bar{f}_n \mid x)$, wobei f_n und $\bar{f}_n$ gleich definiert sein sollen. Mit

$$h(\zeta) = 1, \quad 0 \leq \zeta \leq \gamma^2 \qquad \text{(IV, 38)}$$

$$h(\zeta) = \begin{cases} 0, & \zeta > \gamma^2 + \varepsilon \\ \text{monoton abnehmend, differenzierbar} \end{cases} \qquad \text{(IV, 38)}$$

ist dann für geeignetes ε

$$I(\bar{f}_n \mid x) = h\left(a_n^2(\bar{f}_n(x))\right), \qquad \text{(IV, 39)}$$

und nach den obigen Voraussetzungen:

$$\rho(\bar{f}_n) = \int dx\, F_N(x)\, h\left(a_n^2(\bar{f}_n \mid x)\right). \qquad \text{(IV, 40)}$$

Die Voraussetzung über $F_N(x)$ ist auch für alle Zeiten erfüllt, und man hat also auch

$$\rho(\bar{f}_n \mid t) = \int dx\, U_t^* F_N(x)\, h\left(a_n^2(\bar{f}_n \mid x)\right). \qquad \text{(IV, 41)}$$

Für die Argumente $\bar{f}_n(X)$ nimmt man jetzt solche, die durch $f_n^4(X \mid x)$ entstehen, und ebenso wird $f_n(X \mid x) = f_n^4(X \mid x)$ genommen. Ferner soll sofort die differentielle Form der Gleichung für $\rho(\bar{f}_n \mid t)$, also die master equation als Ausgangspunkt genommen werden, was die Rechnungen sehr vereinfacht und in dem oben erwähnten Sinne erlaubt ist. Man bildet nun im HEISENBERG - Bild

$$\dot{\rho} = \int F_N\, \dot{h}\, dx' \qquad \text{(IV, 42)}$$

mit

$$\dot{h} = \frac{dh}{da_n} \cdot \frac{da_n}{dt} = -\frac{dh}{da_n} \cdot 2 \int \dot{f}_n (\bar{f}_n - f_n)\, d^4\bar{x}. \qquad \text{(IV, 43)}$$

Für f_n gilt die Bewegungsgleichung

$$\dot{f}_n = \sum_{i,r}^{3,N} \frac{p_r^i}{m} \frac{\partial f_n}{\partial q_r^i} + \sum_{i,r}^{3,N} k^i(q_r) \frac{\partial f_n}{\partial p_r^i} + \qquad \text{(IV, 44)}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} \sum_{r,r'}^{N} k^j(q_r, q_{r'}) \frac{\partial f_n}{\partial p_r^j} \quad . \tag{IV, 44}$$

Wenn $K^j(q_r)$ hinreichend langsam veränderlich ist, gelten die Formeln (Bew. S. 45):

$$\sum_{j,r}^{3,N} p_r^j \frac{\partial f_n}{\partial q_r^j} = - \sum_{j,s}^{3,n} p_s^j \frac{\partial f_n}{\partial Q_s^j} \tag{IV, 45}$$

und

$$\sum_{j,r}^{3,N} k^j(q_r) \frac{\partial f_n}{\partial p_r^j} = - \sum_{j,s}^{3,n} k^j(Q_s) \frac{\partial f_n}{\partial p_s^j} \quad . \tag{IV, 46}$$

Dies, in die Bewegungsgleichung für f_n und für ρ eingesetzt, ergibt:

$$\dot{\rho} = \int dx' F_N(x') \frac{dh}{d d_n} \cdot 2 \int d^n\Sigma \left[\frac{1}{m} \sum p_s \cdot \frac{\partial f_n}{\partial Q_s} + \right.$$

$$\left. + \sum k(Q_s) \frac{\partial f_n}{\partial P_s} - \sum \frac{1}{2} k(q_r, q_s) \frac{\partial f_n}{\partial p_r} \right] \cdot (\bar{f}_n - f_n) \, . \tag{IV, 47}$$

Nach dem GAUßschen Satz ist

$$J \equiv \int \frac{\partial}{\partial Q} (\bar{f}_n - f_n)^2 d^n Q \tag{IV, 48}$$

gleich einem Oberflächenintegral. Nach Voraussetzung werden nur Punkte x aus einer Energieschale betrachtet. Es gibt dann also eine Oberfläche eines Gebietes, außerhalb dessen für alle in Frage kommenden $\bar{f}_n$ und f_n sowohl $\bar{f}_n$ als auch f_n verschwinden. Daraus folgt, daß J = 0 ist. J = 0 ist aber gleichbedeutend mit

$$\int \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial Q} (\bar{f}_n - f_n) x^n Q = \int \frac{\partial f_n}{\partial Q} (\bar{f}_n - f_n) d^n Q \qquad \text{(IV, 49)}$$

Die analoge Formel gilt für P. Damit hat man also:

$$\dot{\rho} = \sum_s^n \frac{1}{m} \int d^n \bar{x}\, p_s \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial q_s} \left[2 \int dx' F_N \frac{dh}{d d_n} (\bar{f}_n - f_n) \right] +$$

$$+ \sum_s^n \int d^n \bar{x}\, K(q_s) \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial p_s} \left[2 \int dx' F_N \frac{dh}{d d_n} (\bar{f}_n - f_n) \right] - \qquad \text{(IV, 50)}$$

$$- \sum_{r,r'} \int dx' F_N \frac{dh}{d d_n} \int d^n \bar{x}\, K(q_r, q_{r'}) \frac{\partial f_n}{\partial p_r} (\bar{f}_n - f_n)$$

Die ersten beiden Ausdrücke können durch Einführen der funktionalen Ableitungen noch vereinfacht werden. Es ist

$$\frac{\delta \rho(\bar{f}_n | t)}{\delta \bar{f}_n(\bar{x}')} = \frac{d}{d\varepsilon} \rho(\bar{f}_n(\bar{x}) + \varepsilon\, \delta(\bar{x} - \bar{x}')(t) \Big|_{\varepsilon = 0} \qquad \text{(IV, 51)}$$

Setzt man den Ausdruck für ρ ein, so erhält man:

$$\frac{\delta \rho(\bar{f}_n | t)}{\delta \bar{f}_n(\bar{x}')} = 2 \int dx' F_N \frac{dh}{d d_n} \left(\bar{f}_n(\bar{x}') - f_n(\bar{x}' | x', t) \right). \qquad \text{(IV, 52)}$$

Über ρ war vorausgesetzt, daß es der master equation genügt. Der letzte Term in (IV, 47) gibt also Anlaß zu Übergängen mit einer von W verschiedenen Matrix σ, die von $K(q_r, q_s)$ abhängt und die nicht näher allgemein bestimmt werden kann. Damit wird also schließlich:

$$\dot{\rho}(\bar{f}_n | t) - \sum_s^n \int d^n \bar{x}\, \frac{p_s}{m} \frac{\partial \bar{f}_n}{\partial q_s} \frac{\delta \rho(\bar{f}_n | t)}{\delta \bar{f}(\bar{x})} \qquad \text{(IV, 53)}$$

$$-\sum_{s}^{n}\int d^{n}\bar{x}\, K(q_s)\,\frac{\partial \bar{f}_n}{\partial p_s}\,\frac{\delta \rho(\bar{f}_n|t)}{\delta \bar{f}_n(\bar{x})} \qquad \text{(IV, 53)}$$

$$=\int_{\bar{f}_n^*}\rho(\bar{f}_n^*|t)\,\sigma(f_n^*, f_n)\ .$$

Diese Gleichung ist in dem Sinne eine Verallgemeinerung der BOLTZMANN - Gleichung, in dem makroskopisch determinierte Strömungen Spezialfälle von makroskopisch MARKOFF-schen sind.

Wenn die Wechselwirkungskräfte $K^j(q_r, q_r)$ einen hinreichend langsam veränderlichen Teil enthalten, so kann man in (IV, 44) einen selfconsistent - field - Term vom Wechselwirkungsglied weg zu den äußeren Kräften ziehen und statt mit $K^j(q_r)$ mit

$$\tilde{K}^j(q_r) = K(q_r) + \int \bar{K}^j(q_r, \bar{Q})\, f_1(\bar{\bar{x}}|x)\, d\bar{\bar{x}} \qquad \text{(IV, 54)}$$

rechnen. Da in (IV, 47) h nur in dem $\Xi_n(x)$ ungleich Null ist, für das die $f_n(X|x)$ ungefähr gleich $\bar{f}_n(X)$ sind, kann man in (IV, 47) und damit in (IV, 53) $\tilde{K}^j$ auch mit $\bar{f}_1$ bilden, was dem üblichen selfconsistent - field - Formalismus entspricht.

Kap. V Zusammenfassung

Wie bereits am Anfang der Einleitung erwähnt, ist es das Ziel, in dieser Arbeit eine Definition des Begriffes "makroskopische Observablen" zu geben und einige Aussagen über das zeitliche Verhalten solcher Observablen zu gewinnen. Den heuristischen Ausgangspunkt für diesen Zweck bildete dabei die Vorstellung, daß makroskopische Messungen ungenaue Messungen sind und daß makroskopische Observablen in den makroskopisch nicht unterscheidbaren Zuständen x im Phasenraum "ungefähr" dieselben Werte haben müssen. Es wird daher zunächst in Kap. I allgemein der Begriff der ungenauen Messung untersucht, und danach werden, um die von einem Punkt x makroskopisch nicht unterscheidbaren Punkte anzugeben, in Kap. II die höheren BOLTZMANNSCHEN Dichtefunktionen betrachtet. Diese Wechselbeziehung zwischen BOLTZMANNSCHEN Dichten und makroskopisch nicht unterscheidbaren Punkten ist für einen Spezialfall aus der Gaskinetik her bekannt. Insofern ist die hier angewandte Methode nichts weiter als eine Verallgemeinerung einer sehr bewährten Theorie. Die explizite Definition der BOLTZMANNSCHEN Dichten für Systeme aus einer Teilchensorte wird in Kap. II in den §2, 3 und 4 in drei Schritten gegeben. Dieselben Schritte werden in §7 für allgemeine Systeme kurz wiederholt. Die §5 und 6 dienen der Darstellung einiger mathematischer Eigenschaften der f_n. Da die f_n nicht nur als Hilfsgrößen zur Bestimmung der makroskopischen Observablen Bedeutung haben, sondern selbst von physikalischem Interesse sind, werden auch einige Resultate mit angegeben, die für die weiteren Eintwicklungen in dieser Arbeit entbehrlich sind. In Kap. III, §1 werden dann mit Hilfe der in Kap. II gewonnenen Rsultate die Begriffe makroskopische Observable und makroskopische Gesamtheit definiert und die für die Anwendungen wichtigen Reihen- bzw. Integralentwicklungen angegeben. Als unmittelbare Anwendung ergibt sich daraus die in Kap. III, §2 dargestellte Reduzierung bestimmter Wahrscheinlichkeitsdichten. Das letzte Kapitel ist der Untersuchung zweier spezieller Strömungen im Phasenraum gewidmet, nämlich der makroskopisch MARKOFFSCHEN und den makroskopisch determinierten.

Es wird gezeigt, daß die (unbewiesene) Existenz solcher Strömungen keinen Widerspruch zum Umkehr- und Wiederkehrsatz darstellt. Zu dem Satz, daß (mit Hilfe einer Zweierstoßannahme) für makroskopische Strömungen die BOLTZMANN-Gleichung gilt, wird in §2 die Umkehrung bewiesen, und schließlich wird in §3 eine sehr allgemeine nur noch makroskopische Größen enthaltende Gleichung für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über makroskopische Eigenschaften hergeleitet.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. LUDWIG, danke ich für sehr viele Anregungen und die ständige Förderung dieser Arbeit. Für zahlreiche kritische Hinweise und Diskussionen danke ich den Herren Dr. M. HEIL und Dipl. Phys. W. MÜLLER. Die Arbeit wurde ermöglicht durch die Unterstützung der Air Force Research Division of the Air Research Development Command, USAF.

Literaturverzeichnis

1	LUDWIG, G. :	Z. Phys. 150, 346 (1958); Z. Phys. 152, 98 (1958); Nuov. Cim. Suppl. XIV, 57 (1960)
2	SCHRÖTER, J. :	Endbericht für das Forschungsvorhaben Lu 29/9 der deutschen Forschungsgemeinschaft (unveröffentlicht)
3	GRAD, H. :	Handbuch d. Phys. XII
4	EHRENFEST, P. u. T.:	Encykl. der math. Wissensch. 4, No 32 (1911)
5	PÜTTER, P. St. :	Ann. Phys. 19, 146 u. 247 (1957)
6	RICHTER, H. :	Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Berlin (1956)
7	TOLMAN, R. C. :	Statistical Mechanics, Oxford (1938)
8	LUDWIG, G., W. MÜLLER und J. SCHRÖTER:	A Derivation of BOLTZMANN Equation (unveröffentlicht); Technical Report No I of Contract NR. AF 61 (052) - 239 of AIR RES. AND DEV. COMMAND USAF
9	KÜMMEL, H. :	Z. Phys. 143, 219 (1955)
10	KIRKWOOD:	J. Chem. Phys. 14, 180 (1946)
11	DOOB, J. L. :	Stochastic Processes, N. York, Wiley (1953)
12	PRIGOGINE, J., R. BALESCU:	Physica 26, 145 (1960) und die dort angegebene Literatur

Lebenslauf

Ich, Johannes Joachim Schröter, wurde am 23. IV. 1931 als zweiter Sohn des Zugführers Alwin Georg Schröter und seiner Ehefrau Clara Sidonie, geb. Otto in Dresden geboren. Von 1937 an besuchte ich die Grundschule und von 1941 an das Kreuzgymnasium in Dresden. Mein Schulbesuch war im Jahre 1945 infolge der Kriegsereignisse für ein dreiviertel Jahr unterbrochen. Vom Herbst 1945 an besuchte ich wieder die Kreuzschule, wo ich 1949 das Abitur bestand. Danach studierte ich an der Freien Universität Berlin zunächst ein Semester Biologie und ließ mich dann auf das Hauptfach Physik umschreiben. 1951 wurde ich in die Studienstiftung des deutschen Volkes aufgenommen. 1952 legte ich die Vordiplomprüfung ab. Im W. S. 1953/54 studierte ich an der Universität in Innsbruck. Nach Berlin zurückgekehrt, begann ich die Anfertigung meiner Diplomarbeit. Die Diplomprüfung legte ich im Mai 1957 ab. Seit dieser Zeit arbeitete ich im Institut für Theoretische Physik der FU Berlin an meiner Dissertation.